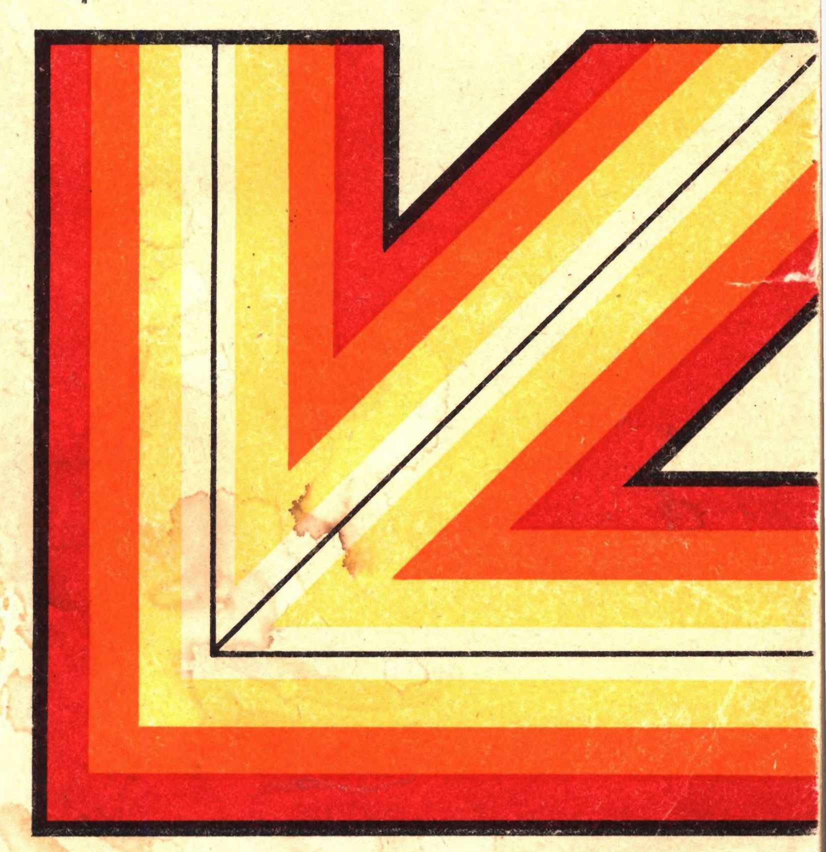
Г. В. Меледин

ФИЗИКА В ЗАДАЧАХ

Экзаменационные задачи с решениями



Г. В. МЕЛЕДИН

ФИЗИКА В ЗАДАЧАХ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений высших учебных заведений



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.3
М 47
УДК 530.1

Меледин Г. В. **Физика в задачах: Экзаменационные задачи с решениями:** Учебное пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.— 208 с., ил.

Сборник содержит свыше четырехсот задач письменного экзамена по физике, предлагавшихся поступающим на физический факультет Новосибирского государственного университета.

В большинстве своем задачи оригинальны. В сборник включены также задачи качественного характера, задачи-оценки и задачи-демонстрации, введенные в систему вступительных экзаменов в последние годы. К наиболее трудным задачам даны подробные решения и методические указания.

Для слушателей и преподавателей подготовительных факультетов и курсов, выпускников и старшеклассников общеобразовательных школ, учащихся физико-математических школ, членов вузовских приемных комиссий, а также лиц, занимающихся самообразованием.

Ил. 211

Рецензенты:
кафедра общей физики Московского инженерно-физического института;
доктор физико-математических наук *С. М. Козел*

Генрий Викторович Меледин

ФИЗИКА В ЗАДАЧАХ

Экзаменационные задачи с решениями

Редакторы *С. П. Вятчанин, М. Н. Андреева, Д. А. Миртова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Сигал, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11814

Сдано в набор 15.05.85. Подписано к печати 27.08.85. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,92. Усл. кр.-отт. 11,76. Уч.-изд. л. 12,29. Тираж 360 000 экз. (2-й завод 200 001—360 000 экз.). Заказ № 1185. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

$М\frac{1704010000-141}{053(02)-85}139-85$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение задач — эффективное средство усвоения физики, надежный инструмент для контроля за степенью понимания физических законов.

Данный сборник содержит большое количество самых разных задач по физике, которые можно решить, не выходя за рамки программы вступительных экзаменов в вузы. В него вошло свыше 400 оригинальных задач, предлагавшихся на письменном вступительном экзамене по физике, проводимом в Новосибирском государственном университете начиная с 1966 г. Эти задачи неизменно из года в год вызывают большой интерес школьников, учителей и преподавателей вузов. Они широко используются в физических олимпиадах, разнообразных школах (зимних и летних, заочных и очных, воскресных и вечерних), на подготовительных отделениях и курсах. Некоторые задачи опубликованы в журнале «Квант» и вошли в ряд учебных пособий.

Сборник имеет два основных раздела: «Задачи» и «Ответы и решения». Материал разделов разбит на главы, которые посвящены механике, тепловым явлениям, электричеству и магнетизму и оптике. Здесь немало задач с реальным содержанием, требующих ясного понимания масштабов явлений. Широко также представлены и задачи идеализированные, только моделирующие реальную ситуацию, физический процесс, явление. Такие задачи обязательно используются в практике обучения физике, контроля за ее усвоением. Иногда они полезны для овладения типичными приемами решения задач.

В задачнике увеличено по сравнению с экзаменами количество задач с числовыми данными. Уместно подчеркнуть, что задачи по физике должны учить умению доводить результат до числа, абитуриенту необходимо знать систему единиц, представлять себе размерности и характерные масштабы физических величин.

Среди задач в этих главах есть совсем простые, стандартные (они отмечены кружком). Немало и сравнительно сложных (есть очень трудные), требующие смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации (такие задачи отмечены звездочкой).

В связи с тем, что в задачнике собраны экзаменационные задачи, предполагающие подготовленность по всему школьному курсу физики и математики, использование данного пособия должно быть особенно эффективным и полезным на завершающей стадии подготовки к вступительным экзаменам по физике, на этапе повторения материала. Однако большинство задач пригодно и для начального этапа изучения физики в школе.

Задачи-оценки и задачи-демонстрации, новые в практике письменных вступительных экзаменов и пока еще недостаточно популярные в школе, собраны в отдельные главы: пятую и шестую. В начале каждой из этих глав дается необходимое в данном случае краткое введение — пояснение к таким задачам.

В задачах-оценках (глава пятая) надо самому выбрать необходимые параметры, построить более или менее грубую модель явления, получить числовой результат, прикинуть его реальность. Отметим, что с подобными задачами, отобранными, конечно, в соответствии со школьной программой, уверенно справляется большинство абитуриентов. Учитывая, что оценки физических величин широко используются в практике физика-исследователя (как теоретика, так и экспериментатора), можно предполагать, что они, видимо, постепенно будут завоевывать свои позиции в процессе обучения физике как в школе, так и в вузе.

В задачах-демонстрациях (шестая глава) надо объяснить физическое явление, демонстрируемое на экзамене, среди различных факторов выделить главный.

Задачи-оценки и задачи-демонстрации — самые сложные для абитуриента задачи: они требуют значительного методического опыта и знания основ физики, поэтому браться за их решение стоит, когда пройдены и повторены все разделы физики. Именно поэтому в первую очередь эти задачи собраны в отдельные главы, отделены от обычных задач соответствующего раздела физики.

Можно надеяться, что сравнительно небольшое количество задач, единых по подходу к решению, позволяющих научиться быстро получать числовой ответ в доста-

точно сложных физических ситуациях, если уж заинтересует читателя, то будет решено полностью.

В отношении решений наш задачник занимает промежуточное положение среди двух интересных пособий, вышедших несколько лет назад в издательстве «Наука» под одним и тем же названием «Задачи по физике». Один задачник составлен И. И. Воробьевым, П. И. Зубковым, Г. А. Кутузовой и др. под редакцией О. Я. Савченко, авторами другого являются И. Ш. Слободецкий и Л. Г. Асламазов.

В отличие от задачника И. И. Воробьева, П. И. Зубкова, Г. А. Кутузовой и др. наш сборник содержит не только ответы, но и решения большинства задач, не выходящие за рамки школьной программы. Разбор задач, особенно сложных, должен существенно помочь читателю в усвоении физики и приемов решения задач и в подготовке к вступительным экзаменам в вузы. Краткость многих решений позволяет не обесценивать задачи: многое еще остается для самостоятельной работы. Приводимые в задачнике ответы и решения можно использовать в качестве указаний и для самоконтроля.

В книге И. Ш. Слободецкого и Л. Г. Асламазова решения сложных задач превратились в глубокие, очень интересные обсуждения вопросов современной физики и техники, стали научно-популярными статьями, доступными школьникам. Кстати, их можно использовать в качестве полезного дополнительного материала при разборе некоторых трудных задач нашего сборника, а также ряда задач-оценок.

Завершает наше пособие список рекомендуемой литературы.

В составлении задач, использованных в сборнике, принял участие широкий круг физиков Сибирского отделения АН СССР и преподавателей НГУ. Около половины задач предложены Г. Л. Коткиным и Г. В. Мелединым. В составлении остальных задач наибольший вклад внесли В. П. Бородин, П. И. Зубков и О. Я. Савченко.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить рецензентов за доброжелательную критику и целый ряд полезных советов, способствовавших улучшению задачника. Важными и существенными для автора были беседы с Г. Л. Коткиным и И. Ф. Гинзбургом. Автор искренне благодарен всем, вложившим свой труд в создание этой книги.

Г. В. Меледин

ЗАДАЧИ

Глава I. МЕХАНИКА

§ 1. Кинематика. Относительность движения

1.1°. При скорости ветра $u_1 = 10$ м/с капля дождя падает под углом 30° к вертикали. При какой скорости ветра u_2 капля будет падать под углом 45°?

1.2°. Кольцо сварено из двух полуколец радиуса R, скорости звука в которых равны c_1 и c_2. Через какое время встретятся звуковые волны, возбужденные ударом по точке сварки?

1.3°. В реку, скорость течения которой $u = 0{,}5$ м/с, из некоторой точки O на берегу у самой воды бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде $c = 1$ м/с. Через какое время после падения камня волна от него придет в точку O, если камень упал в воду на расстоянии $l = 10$ м от берега?

1.4°. Самолет летит по прямой из города M в город N и обратно. Найти отношение полных времен полета в случаях, когда от M к N дует ветер со скоростью u и когда ветер с той же скоростью дует перпендикулярно прямой MN. Скорость самолета относительно воздуха в том и другом случаях равна v.

1.5. Гидролокатор подводной лодки, погружающийся вертикально, излучает короткие звуковые сигналы длительности τ_0 в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеряемых гидроакустиком на лодке, равна τ. Какова скорость погружения лодки? Скорость звука в воде равна c. Дно горизонтально.

1.6°. При взрыве покоящейся цилиндрической бомбы радиуса R осколки, разлетающиеся в радиальном направлении, за время t удаляются от оси цилиндра на расстояние l_1. На какое расстояние l_2 от оси цилиндра удаляются осколки за то же время t, если в момент взрыва бомба будет вращаться вокруг своей оси с угловой скоростью ω? Влиянием силы тяжести пренебречь.

1.7°. Самолет пролетает над наблюдателем на постоянной высоте h с постоянной скоростью v, большей скорости звука c. Какой угол с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку в тот момент, когда истинное (видимое) направление от наблюдателя на самолет составляет с вертикалью угол φ?

1.8°. Пассажир первого вагона поезда длины l прогуливался по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд начал двигаться с ускорением a. Пассажир сразу же побежал со скоростью v. Через какое время он догонит свой вагон?

1.9°. В момент, когда опоздавший пассажир вбежал на платформу, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона, который прошел мимо него за время t_1. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2. На сколько опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд движется равноускоренно. Длина вагонов одинакова.

1.10°. Два тела, двигаясь с противоположно направленными скоростями, после соударения на горизонтальной плоскости одновременно остановились через время $t=1$ с на расстоянии $l=1$ м друг от друга. Найти коэффициент трения скольжения между плоскостью и каждым телом. Считать, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

1.11. Из точки A вертикально вверх брошен камень со скоростью $v=10$ м/с. Через какое время следует бросить с той же по модулю скоростью второй камень из точки B под углом $\alpha=45°$ к горизонту, чтобы он попал в первый камень? Точки A и B расположены на одной горизонтали. Расстояние между ними $l=4$ м. Считать, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

1.12. Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью $\boldsymbol{u}$ (рис. 1.12). В нее бросил камень неопытный «охотник», причем бросок был сделан без

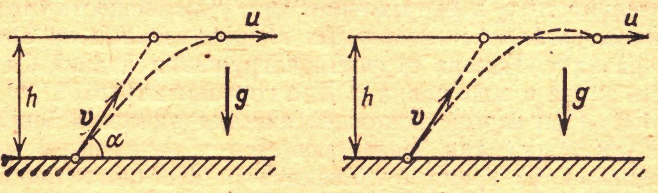


Рис. 1.12

упреждения, т. е. в момент броска скорость камня $\boldsymbol{v}$ была направлена как раз на утку под углом α к горизон-

ту. На какой высоте летела утка, если камень все же попал в нее? Сопротивлением воздуха, размерами утки и ростом «охотника» пренебречь.

1.13. Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью $v=10$ м/с под углом $\alpha=60°$ к горизонту, если он ударится о потолок (рис. 1.13)? Высота потолка $h=3$ м, удар упругий. Сопротивлением воздуха пренебречь.

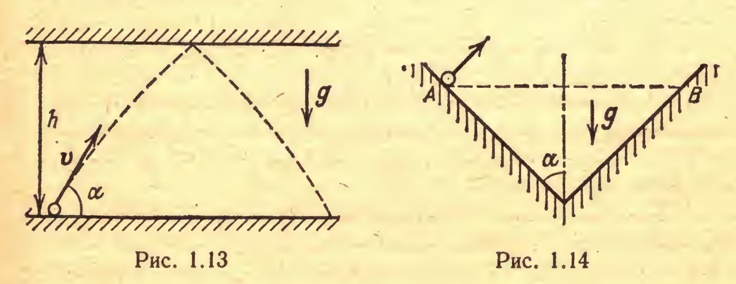


Рис. 1.13 Рис. 1.14

1.14. В конической лунке с вертикальной осью симметрии и углом раствора $2\alpha=90°$ прыгает шарик (рис. 1.14), ударяясь о противоположные точки A и B, расположенные на одной горизонтали, через одно и то же время $\tau=1$ с. Найти максимальную и минимальную скорости. Считать, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

1.15. На поверхности земли взорвался маленький шар так, что осколки разлетелись во все стороны равномерно с одинаковой по модулю скоростью v. Какова масса осколков, выпавших на поверхность земли вне круга радиуса R (с центром в точке взрыва), если полная масса осколков равна M? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.16*. Под каким наименьшим углом к горизонту следует бросать мяч, чтобы он пролетел сквозь баскетбольное кольцо сверху, не ударившись о него? Радиус мяча равен r, радиус кольца $R=2r$, высота его над полом $H=3$ м. Баскетболист бросает мяч с высоты $h=2$ м, находясь на расстоянии $l=5$ м от кольца, считая по горизонтали. Изменением скорости мяча за время пролета через кольцо пренебречь.

1.17°. Бесконечный конус с углом раствора 90° движется с постоянной скоростью справа налево к центру покоящегося шара. Направление скорости совпадает с осью конуса. Шар разрывается на много осколков, которые летят во все стороны равномерно с той же по

модулю скоростью $\boldsymbol{v}$. Какая часть осколков попадает на конус? Влиянием силы тяжести пренебречь.

1.18°. Параллельный пучок одинаковых ядер движется со скоростью $\boldsymbol{v}$. Ядра в пучке начинают самопроизвольно делиться на две части одинаковой массы. Максимальная скорость осколков, движущихся в направлении пучка, равна $\boldsymbol{u}$ (в неподвижной системе отсчета). Найти скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку.

1.19. Круглое ядро радиуса R, движущееся со скоростью $\boldsymbol{v}$, пролетает сквозь рой мух, движущихся со скоростью $\boldsymbol{u}$ перпендикулярно направлению полета ядра. Толщина роя равна d, в единице его объема в среднем находится n мух. Сколько мух убьет ядро? Влиянием силы тяжести пренебречь.

1.20°. Шарик движется между двумя массивными вертикальными стенками, соударяясь с ними. Одна из стенок закреплена, другая удаляется от нее с постоянной скоростью $u=50$ см/с. Считая движение шарика все время горизонтальным, а удары о стенки — абсолютно упругими, найти его окончательную скорость, если начальная скорость v_0 равна: а) 1967 см/с; б) 1917 см/с.

1.21°. Тяжелая горизонтальная плита движется вниз с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_0$. С высоты h отпускают (без начальной скорости) шарик, который начинает подпрыгивать на плите. Найти зависимость скорости шарика от времени и построить график этой зависимости. Ускорение свободного падения равно $\boldsymbol{g}$. Считать удары шарика о плиту упругими.

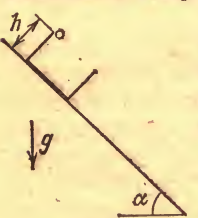


Рис. 1.22

1.22. На гладкую наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha=45°$ поставили цилиндрический с плоским дном стакан высоты $h=0{,}1$ м (рис. 1.22). В момент начала движения стакана от верхнего его края внутрь роняют маленький шарик. Какой путь по наклонной плоскости пройдет стакан к моменту n-го ($n=5$) удара шарика о дно? Считать удары шарика о дно стакана упругими.

§ 2. Динамика

1.23°. На тело массы m, вначале покоившееся на горизонтальной плоскости, в течение времени t действует горизонтальная сила $\boldsymbol{F}$. Коэффициент трения тела о плос-

кость равен k. Какое расстояние пройдет тело за время движения?

1.24°. С каким максимальным ускорением может двигаться вверх по наклонной дороге автомобиль, если угол наклона дороги к горизонту равен α, а коэффициент трения между колесами автомобиля и дорогой равен k? Ускорение свободного падения равно g *).

1.25°. Угол наклона ленты подъемника к горизонту $\alpha=5°$. Коэффициент трения между грузом и лентой $k=0,2$. При каком максимальном ускорении ленты поднимаемый ящик не будет скользить по ленте подъемника? Лента подъемника не прогибается. Считать, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

1.26. Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной плоскости с ускорением a. Брусок A, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, скользит по внутренней поверхности цилиндра так, что угол между радиусом OA и вертикалью остается постоянным. Найти этот угол, если коэффициент трения бруска о поверхность цилиндра равен k.

1.27°. С наклонной плоскости, угол наклона которой равен α, соскальзывает без трения клин. Верхняя грань клина горизонтальна. На клине покоится тело массы m. Найти силу трения, действующую на тело.

1.28°. С наклонной плоскости, угол наклона которой равен α, соскальзывают два груза массы m_1 и m_2, связанные невесомой нерастяжимой нитью (рис. 1.28). Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны соответственно k_1 и k_2, причем $k_2>k_1$. Найти силу натяжения нити.

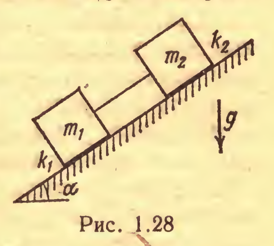


Рис. 1.28

1.29°. Цепочка из n тел одинаковой массы m, соединенных пружинами, движется вдоль горизонтальной плоскости под действием силы F. Найти силу натяжения каждой пружины, если коэффициент трения тел о плоскость равен k.

1.30°. На тело массы m, расположенное на горизонтальной плоскости, действует сила F, направленная вниз

---

*) Здесь и далее в этой главе в задачах с участием силы тяжести ускорение свободного падения считается известным и обозначается буквой g.

под углом α к горизонту. Сила приложена к центру масс, коэффициент трения равен k. Найти ускорение тела.

1.31°. В предыдущей задаче сила направлена вверх под углом α к горизонту. Найти ускорение тела.

1.32. Система грузов, изображенная на рис. 1.32, находится в лифте, который движется вверх с ускорением

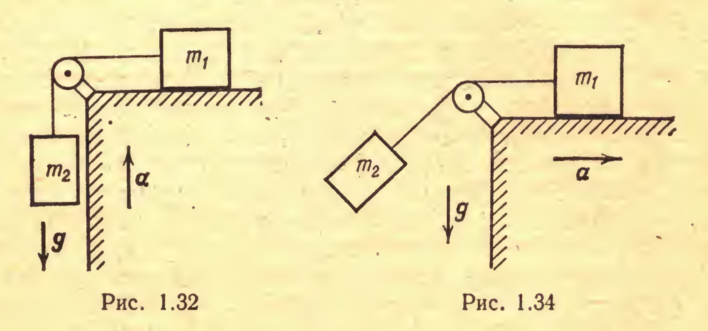


Рис. 1.32 Рис. 1.34

a. Найти силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массы m_1 и опорой равен k.

1.33. Найти ускорение цилиндра, скользящего по желобу, угол раствора которого равен 2α. Желоб имеет вид двугранного угла, ребро которого наклонено к горизонту под углом β, а плоскости образуют с горизонтом одинаковые углы. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба равен k.

1.34. Груз массы m_1 находится на столе, который движется горизонтально с ускорением a (рис. 1.34). К грузу присоединена нить, перекинутая через блок. К другому концу нити подвешен второй груз массы m_2. Найти силу натяжения нити, если коэффициент трения груза массы m_1 о стол равен k.

1.35. Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к одному концу которой прикреплен груз массы m_0, а к другому в первый раз присоединили пружину с подвешенным к ней грузом массы m_1 (рис. 1.35, *а*), во второй раз — пружину, имеющую другую жесткость, с подвешенным к ней грузом массы m_2 (рис. 1.35, *б*), в третий раз последовательно к первой пружине с подвешенным грузом массы m_1 присоединили вторую пружину с подвешенным грузом массы m_2 (рис. 1.35, *в*). В первый раз удлинение пружины равно x_1, во второй раз — равно x_2. Каково суммарное удлинение пружин в третий раз?

Рассматривать установившееся движение грузов (т. е. в отсутствие колебаний). Массой блока, нити и пружины пренебречь.

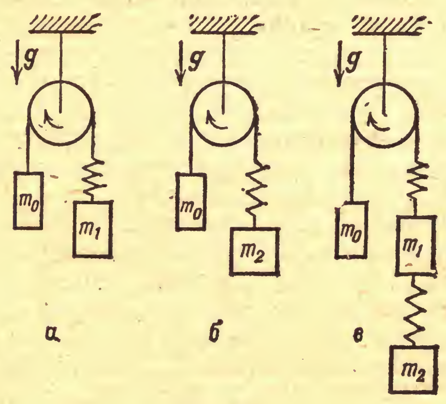


Рис. 1.35

1.36*. Однородный тяжелый канат, подвешенный за один конец, не рвется, если длина каната не превышает значения l_0. Пусть тот же канат соскальзывает под действием силы тяжести из горизонтально расположенной трубки с загнутым вниз под прямым углом концом. При какой максимальной длине канат соскользнет, не порвавшись? Трение отсутствует. Радиусом изгиба трубки пренебречь.

1.37*. На трехгранную призму, левый угол которой $\alpha < 45°$, а верхний — прямой, падают однородным потоком с одной и той же высоты шарики (рис. 1.37). В какую сторону будет двигаться призма? Учитывать только один удар каждого шарика. Считать удары упругими. Трением пренебречь.

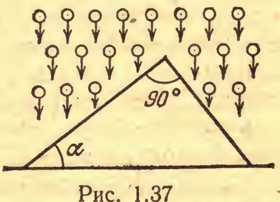


Рис. 1.37

1.38. Цилиндрический сосуд закрыт сверху поршнем массы M, площадь которого равна S. На поршне без потери энергии подпрыгивают шарики массы m каждый ($m \ll M$). Среднее число ударов о поршень в единицу времени равно n_t, высота подскока каждого шарика равна h, атмосферное давление равно p_0. Найти давление газа под поршнем.

§ 3. Вращательное движение. Колебания

1.39*. Через сколько лет повторяется великое противостояние Марса *), если один оборот вокруг Солнца Марс делает за 687 суток?

1.40. С какой угловой скоростью должен вращаться вокруг горизонтальной оси симметрии цилиндр, чтобы мелкие частицы, находящиеся внутри цилиндра, не соскальзывали с его поверхности? Коэффициент трения между поверхностью цилиндра и частицами $k=1$, внутренний радиус цилиндра равен r.

1.41°. Система из двух маятников, в которой точкой подвеса второго маятника служит массивное тело первого маятника (двойной маятник), вращается вокруг вертикальной оси так, что обе нити лежат в одной плоскости и составляют с вертикалью постоянные углы α и β. Массы грузов маятника равны. Длины нитей одинаковы и равны l. Найти угловую скорость вращения маятника.

1.42°. Дорога имеет вираж с углом наклона к горизонту α и радиусом закругления r. Какую скорость должен иметь на вираже велосипедист, чтобы не упасть? Трением колес на вираже пренебречь.

1.43. Спортивный молот — ядро на тросике, которое бросают, раскрутив вокруг себя с достаточной скоростью. Найти максимальное расстояние, которое может пролететь молот, если удерживающее усилие спортсмена перед моментом броска в n раз превышало силу тяжести, действующую на молот. Расстояние вдоль троса от оси вращения до ядра равно l. Сопротивлением воздуха и начальной высотой траектории ядра пренебречь.

1.44°. Груз массы m прикреплен двумя одинаковыми пружинами жесткости $\varkappa$ к рамке и может двигаться без трения вдоль горизонтального стержня AB, соединенного с рамкой. Рамку привели во вращение с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO', лежащей в плоскости рамки на расстоянии l от ее центра (рис. 1.44). Находясь на каком расстоянии от центра рамки, груз

---

*) Противостоянием Марса называется момент, когда Солнце, Земля и Марс располагаются на одной прямой по одну сторону от Солнца. Так как орбита Марса довольно сильно вытянута по сравнению с орбитой Земли, то расстояние сближения этих планет в моменты противостояний различно. Великим противостоянием Марса называется момент наибольшего его сближения с Землей, в то время как обе эти планеты находятся на одной прямой с Солнцем.

может быть неподвижен относительно вращающейся рамки?

1.45°. Два тела массы m_1 и m_2 привязаны к нити, закрепленной в некоторой точке, и находятся на гладком столе. Расстояния от них до закрепленной точки нити равны l_1 и l_2 соответственно. Система вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через закрепленную точку, с угловой скоростью ω. Найти силы натяжения, действующие на нить.

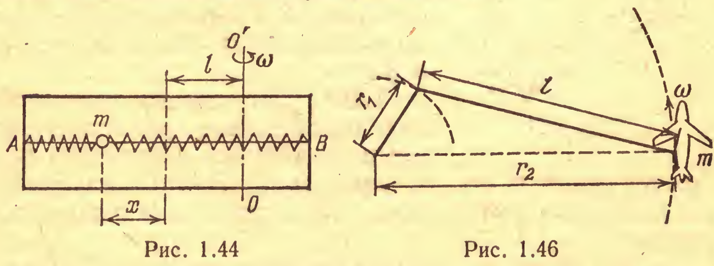


Рис. 1.44 Рис. 1.46

1.46. Мальчик вращает на веревочке длины l модель самолета. Рука, держащая веревочку, описывает окружность радиуса r_1 (рис. 1.46). Самолет движется по окружности радиуса r_2, причем $r_1+l>r_2$, продольная ось самолета расположена по касательной к этой окружности. Найти силу натяжения веревочки. Масса самолета равна m, угловая скорость равна ω. Траектории движения руки и самолета лежат в горизонтальной плоскости. Подъемная сила направлена вверх.

1.47. По гладкому столу движутся два тела массы m_1 и m_2, соединенные невесомой нерастяжимой нитью длины l. В некоторый момент скорость тела массы m_1 оказывается равной нулю, а скорость тела массы m_2 — равной v и направленной перпендикулярно нити. Найти силу натяжения нити.

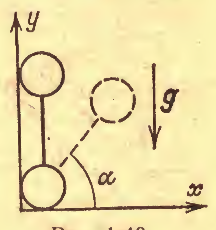


Рис. 1.48

1.48*. Найти силу, действующую на вертикальную стенку со стороны опрокидывающейся гантели в момент, когда ось гантели составляет угол α с горизонтом (рис. 1.48). Гантель начинает свое движение из вертикального положения без начальной скорости. Масса каждого шара гантели равна m, расстояние между шарами много больше радиуса шара. Трением пренебречь.

1.49. Две одинаковые звезды A и B движутся по окружностям под действием взаимного притяжения на неизменном расстоянии r друг от друга (рис. 1.49). На некотором неизвестном расстоянии от звезд в плоскости их орбиты движется легкая планета C, причем $AC = BC = x$, а треугольник ABC сохраняет при движении звезд и планеты свои размеры. Найти расстояние x. Масса планеты C пренебрежимо мала по сравнению с массами звезд A и B.

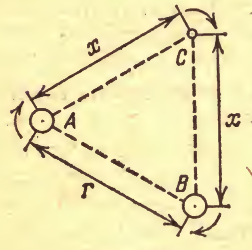


Рис. 1.49

1.50*. Две звезды вращаются друг относительно друга с постоянными по модулю скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ и с одним и тем же периодом T. Найти массы звезд и расстояние между ними. Гравитационная постоянная равна G.

1.51*. Известно, что спутник, находящийся на орбите, высота которой над поверхностью Земли $h = 3{,}6 \cdot 10^4$ км, обращается вокруг Земли за одни сутки и может «висеть» над одной и той же точкой экватора. Допустим, что для проведения спортивных передач с Московской олимпиады на такую же высоту запустили спутник, который «завис» над Москвой. Какую силу тяги должен развивать двигатель спутника, чтобы удерживать его на заданной орбите? Масса спутника $m = 1$ т, широта Москвы — около 60°, радиус Земли $r_З = 6{,}4 \cdot 10^3$ км.

1.52°. От груза, висящего на пружине жесткости $\varkappa$, отваливается его часть массы m. На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза?

1.53. Определить период колебаний груза C, шарнирно прикрепленного двумя легкими стержнями длины l к стержню AB, укрепленному под углом α к горизонту (рис. 1.53). $\angle BAC = \angle ABC = \beta$. Трением пренебречь.

Рис. 1.53

1.54*. Точку подвеса маятника длины l мгновенно приводят в движение в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, затем после перемещения на расстояние x мгновенно останавливают. При какой скорости точки подвеса колебания маятника, возникшие с

началом движения, прекращаются сразу же после остановки? Перед началом движения маятник покоился. Угол отклонения маятника от вертикали считать малым.

§ 4. Законы сохранения энергии и импульса. Работа. Мощность

1.55. Нить длины l с привязанным к ней шариком массы m отклонили на 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса нужно поставить гвоздь, чтобы нить, зацепившись за него, порвалась, если она выдерживает силу натяжения T?

1.56. Легкий пластмассовый шарик для игры в настольный теннис роняют с высоты h. В нижней точке его траектории по нему ударяют ракеткой снизу вверх, после чего шарик подпрыгивает на высоту, в n раз бо́льшую первоначальной. Определить скорость ракетки в момент удара. Считать удар упругим, сопротивлением воздуха пренебречь. Масса ракетки много больше массы шарика.

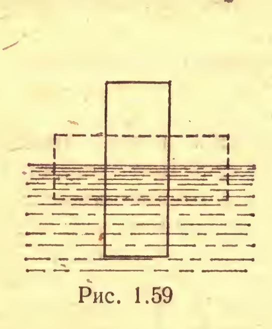
1.57. По цилиндрической гладкой и жесткой спирали, ось которой вертикальна, скользит бусинка массы m. Радиус витка спирали равен r, шаг спирали (расстояние по вертикали между двумя соседними витками) равен h_0. С какой силой действут на спираль бусинка в момент, когда она опустилась на расстояние h (по вертикали)? Бусинка была отпущена без начальной скорости.

1.58. Два груза массы m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) соединены нитью, переброшенной через неподвижный блок, и расположены над столом на высоте h. В начальный момент грузы покоятся, затем их отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе груза о стол? Удар абсолютно неупругий, то есть груз прилипает к столу.

1.59°. Какое количество теплоты выделится при перевертывании наполовину погруженного в воду свободно плавающего бруска квадратного сечения из неустойчивого вертикального положения в более устойчивое горизонтальное (рис. 1.59)? Масса бруска $m = 10$ г, длина $l = 20$ см, сечение $d \times d = 1 \times 1$ см². Считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1.60. В цилиндр радиуса R, частично заполненный водой, падает цилиндрическая пробка радиуса r и высоты h (рис. 1.60). Начальная высота нижней поверхности пробки над уровнем воды равна H, начальная скорость равна нулю. Какое количество теплоты выделится после

того, как движение пробки и воды прекратится? Плотность пробки равна ρ, плотность воды равна ρ_0.


Рис. 1.59

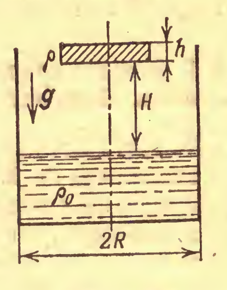


Рис. 1.60

1.61°. На глубине H моря, на дне, стоит бак кубической формы, имеющий высоту h и заполненный водой. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы выкачать воду из бака? Плотность воды равна ρ_0.

1.62. Космический корабль движется к Луне под влиянием ее притяжения. На большом расстоянии от Луны скорость корабля относительно нее была нулевой. На какой высоте от поверхности Луны должен быть включен тормозной двигатель для осуществления мягкой посадки, если считать, что двигатель создает пятикратную перегрузку ($5g$)? Ускорение свободного падения на поверхности Луны в $n=6$ раз меньше, чем на Земле ($g_Л = g/6$). Радиус Луны $r_Л \approx 1{,}7 \cdot 10^3$ км. Изменением массы корабля при торможении пренебречь. Считать ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны постоянным.

1.63*. С какой минимальной скоростью надо отправить тело с поверхности Земли, чтобы оно достигло Луны? Радиус Земли равен $r_З$. Расстояние между Землей и Луной равно l, отношение их масс равно n. Движением Луны вокруг Земли и влиянием Солнца пренебречь. Ответ выразить через данные задачи и ускорение свободного падения g.

1.64. Тело запустили вдоль экватора в направлении с востока на запад с такой скоростью, что очень далеко от Земли его скорость стала нулевой. Такое же тело с той же скоростью запустили тоже вдоль экватора, но в направлении с запада на восток. С какой скоростью тело будет двигаться на очень большом расстоянии от Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь. Длина экватора

$l = 4 \cdot 10^4$ км, период обращения Земли $T = 1$ сут, радиус Земли $r_З = 6{,}4 \cdot 10^3$ км. Считать, что ускорение свободного падения на Земле $g = 10$ м/с^2.

1.65. В горизонтальной гладкой трубе имеется кольцевая петля радиуса r (рис. 1.65), расположенная в вертикальной плоскости. С какой минимальной скоростью должен двигаться на горизонтальном участке трубы тонкий гибкий канат длины $l > 2\pi r$, чтобы пройти через петлю? Считать радиус петли r много большим радиусов трубы и каната.

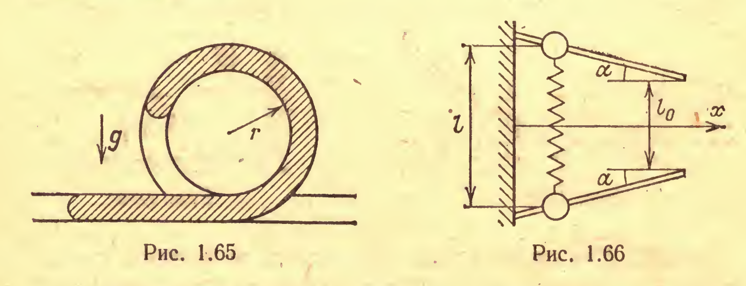


Рис. 1.65 Рис. 1.66

1.66°. На концах невесомой пружины жесткости $\varkappa$ имеются маленькие бусинки массы m каждая. Бусинки надеты на жестко закрепленные стержни так, как показано на рис. 1.66. Расстояние между свободными концами стержней l_0 совпадает с длиной пружины в нерастянутом состоянии. С какой скоростью будет двигаться пружина в направлении оси x после того, как она соскочит со стержней? В начальный момент пружина покоится, а ее длина равна l. Трением и силой тяжести пренебречь.

Рис. 1.67

1.67. К концам двух нерастянутых пружин, жесткости которых равны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (рис. 1.67), прикреплено тело массы m так, что оно может двигаться вдоль прямой AB. Конец левой пружины закреплен. Удерживая тело на месте, конец B правой пружины отводят на расстояние l и закрепляют в точке B', после чего тело отпускают. Найти наибольшую скорость тела. Трением и силой тяжести пренебречь.

1.68°. Два одинаковых шарика соединены невесомым стержнем длины l_0. Система расположена на горизон-

тальной плоскости и приведена во вращение так, что ее центр покоится. Сколько оборотов сделает система? Начальная скорость каждого из шариков равна v_0, коэффициент трения о плоскость равен k.

1.69°. По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α_1 с высоты H без начальной скорости соскальзывает тело. Достигнув точки A, тело начинает подниматься вверх по наклонной плоскости с углом наклона α_2 (рис. 1.69). Полагая коэффициенты трения тела о плоскости равными k_1 и k_2, найти высоту подъема тела. Переход с плоскости на плоскость — плавный и гладкий.

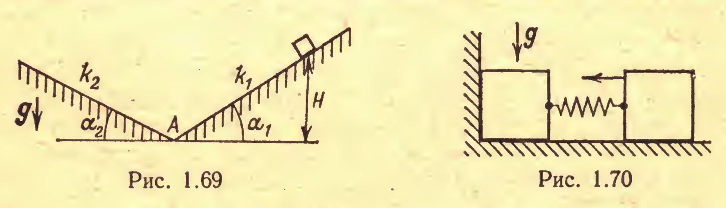


Рис. 1.69 Рис. 1.70

1.70*. Два одинаковых тела массы m каждое, соединенные пружиной жесткости $\varkappa$, лежат на горизонтальной плоскости (рис. 1.70). Левое тело касается вертикальной стенки. Какую минимальную скорость, направленную к стенке, надо сообщить правому телу, чтобы при обратном движении от стенки оно сдвинуло левое тело? Коэффициент трения каждого тела о плоскость равен k. Пружина в начальный момент не деформирована.

1.71*. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы m_1 и m_2, соединенные ненапряженной пружиной. Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость равен k.

1.72. Под каким углом к горизонту надо направить струю воды из брандспойта, чтобы она падала на расстоянии l от него? Плотность воды равна ρ_0, площадь отверстия — S, мощность мотора — P, а его к. п. д. — η. Высоту отверстия над землей принять равной нулю.

1.73*. Автомобиль массы m с обеими ведущими осями трогается с места. Двигатель работает с постоянной мощностью P. Коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен k. Найти зависимость скорости автомобиля от времени и начертить качественный график этой зависимости. Сопротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

1.74. Пуля массы m, летевшая с начальной скоростью $\boldsymbol{v}$, пробивает один подвешенный груз массы m и застревает во втором подвешенном грузе той же массы. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузом, найти количество теплоты Q_1, выделившееся в первом грузе, если во втором выделилось количество теплоты Q_2.

1.75. Артиллеристы стреляют так, чтобы ядро попало в неприятельский лагерь. В момент вылета ядра из пушки на него садится верхом барон Мюнхаузен, и потому ядро падает, не долетев до цели. Какую часть пути Мюнхаузену придется пройти пешком, чтобы добраться до вражеского лагеря? Принять, что Мюнхаузен впятеро тяжелее ядра. Посадку барона на ядро считать абсолютно неупругим ударом.

1.76°. На краю стола высоты h лежит маленький шарик массы m_1. В него попадает пуля массы m_2, движущаяся горизонтально со скоростью $\boldsymbol{v}$, направленной в центр шарика. Пуля застревает в шарике. На каком расстоянии от стола по горизонтали шарик упадет на землю?

1.77. Тележка массы m_1 вместе с человеком массы m_2 движется со скоростью $\boldsymbol{u}$. Человек начинает идти с постоянной скоростью по тележке в том же направлении. При какой скорости человека относительно тележки она остановится? Трением колес тележки о землю пренебречь.

1.78. На покоящееся тело массы m_1 налетает со скоростью $\boldsymbol{v}$ тело массы m_2. Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно растет за время τ от нуля до значения F_0, а затем линейно убывает до нуля за то же время τ. Определить скорости тел после взаимодействия и количество выделившейся теплоты.

1.79. В центре незакрепленной сферы радиуса r и массы M разрывается на мелкие осколки снаряд массы m. Осколки разлетаются во все стороны равномерно с одинаковой по модулю скоростью $\boldsymbol{v}$ (рис. 1.79). В сфере имеются два круглых отверстия с центрами, лежащими на одном диаметре. Осколки, не вылетевшие через отверстие, прилипают к поверхности сферы. Найти конечную скорость сферы. Углы α_1 и α_2 считать близкими, но не одинаковыми. Сопротивлением воздуха и силой тяжести пренебречь.

1.80*. На горизонтальной гладкой плоскости в начальный момент покоится прямоугольная рамка массы m_1, длина большей стороны которой равна l (рис. 1.80). Внутри рамки по плоскости со скоростью $\boldsymbol{v}$, параллельной

длинной стороне, начинает двигаться шарик массы m_2, который продолжает движение, ударяясь о середины коротких сторон рамки. Найти время между ударами

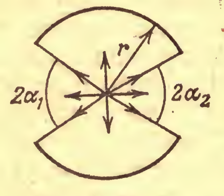


Рис. 1.79

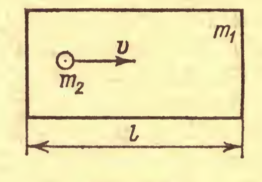


Рис. 1.80

шарика об одну и ту же короткую сторону. Размерами шарика пренебречь. Считать удары упругими.

1.81°. Два шарика массы m_1 и m_2 одновременно начинают соскальзывать навстречу друг другу без трения и вращения с двух горок одинаковой формы и высоты H. При столкновении шарики слипаются. На какую высоту поднимется слипшийся шар?

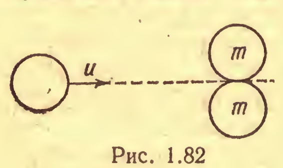


Рис. 1.82

1.82. Два одинаковых шара массы m покоятся, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, касающейся обоих шаров (рис. 1.82). Найти массу налетающего шара, если после удара он остановился. Радиусы всех шаров одинаковы. Считать удар упругим.

1.83. Шар, движущийся со скоростью u, упруго сталкивается с двумя покоящимися шарами, как в предыдущей задаче. Найти скорости шаров после столкновения. Шары имеют одинаковые массы и радиусы.

1.84. На гладком горизонтальном столе вдоль одной прямой лежат, не соприкасаясь $n=1969$ шаров, радиусы которых одинаковы, а массы равны: m, $m/2$, $m/4$, ..., $m/2^{n-1}$. На первый шар налетает со скоростью, параллельной той же прямой, шар массы $2m$. Найти скорость, которую приобретает последний шар. Считать удары упругими и лобовыми.

1.85. Два одинаковых шара массы m каждый связаны прочной нитью (рис. 1.85). Доска массы $M=2m$ налетает со скоростью $u=1$ м/с на эту систему и ударяет по середине нити. Найти скорость шаров при ударе о доску.

1.86*. Прямоугольный брусок массы M с полусферической выемкой радиуса $r=0{,}2$ м стоит вплотную к вер-

тикальной стенке на горизонтальной поверхности (рис. 1.86). С какой максимальной высоты над ближайшей к стенке верхней точкой A края выемки надо отпустить

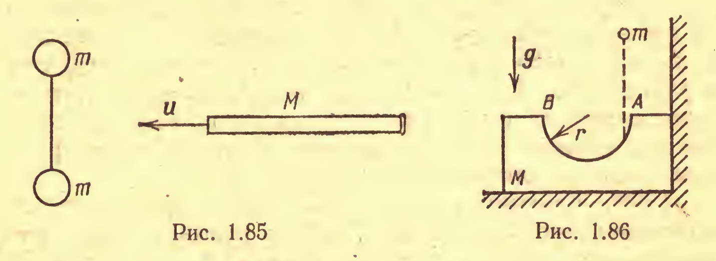


Рис. 1.85 Рис. 1.86

маленький шарик массы $m=M/5$, чтобы он не поднялся над противоположной точкой B выемки? Трением пренебречь.

1.87*. Изогнутая под углом 2α узкая трубка AKB неподвижно закреплена на тележке так, что каждое колено ее составляет угол α с вертикалью (рис. 1.87). Половина трубки заполнена водой, удерживаемой заслонкой K. Тележка может двигаться по горизонтальной плоскости. В некоторый момент заслонку K открывают. Найти скорость тележки в тот момент, когда середина столба воды проходит самое нижнее положение. Начальные скорости равны нулю. Масса тележки с пустой трубкой равна M, масса воды равна m, $AK=BK=l$. Трением пренебречь.

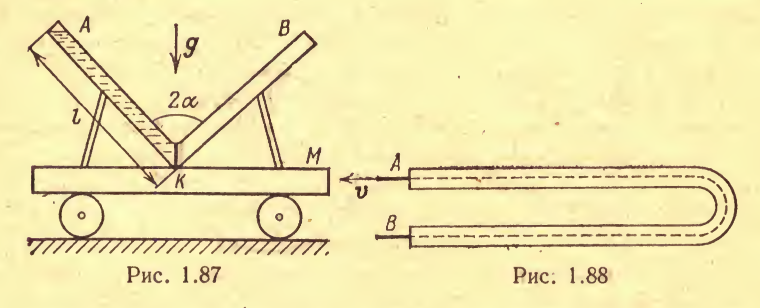


Рис. 1.87 Рис. 1.88

1.88*. Внутри U-образной трубки массы M, лежащей на столе, находится нерастяжимая нить массы m (рис. 1.88). В начальный момент в каждом колене трубки находится по половине нити, а сама трубка движется. Нить в трубке движется так, что скорость конца A нити равна $\boldsymbol{v}$, а скорость конца B — нулю. С какой скоростью

будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Трением пренебречь; радиус изгиба трубки считать очень малым.

1.89*. В вертикальном цилиндре под поршнем массы M прыгают, упруго ударяясь о поршень и дно цилиндра, n шариков ($n \gg 1$) массы m каждый. Система находится в равновесии. Высота поршня над дном равна h. На какую высоту будет подскакивать шарик, если поршень быстро убрать? Трением поршня о стенки цилиндра и атмосферным давлением пренебречь.

1.90*. Гладкий клин массы M может скользить по горизонтальной плоскости. На его грань, образующую угол α с горизонтом, положен гладкий брусок массы m. Найти ускорение клина. Трением пренебречь.

§ 5. Статика. Момент сил

1.91*. Шар лежит в щели ABC, образованной двумя плоскими стенками, причем ребро щели горизонтально (рис. 1.91). Найти угол между плоскостями, если сила давления шара на вертикальную стенку BC вдвое превышает силу тяжести, действующую на шар. Трением пренебречь.

1.92°. Шар радиуса r и массы m подвешен на нити длины l, закрепленной на вертикальной стенке. Найти силу, с которой шар действует на стенку. Трением пренебречь.

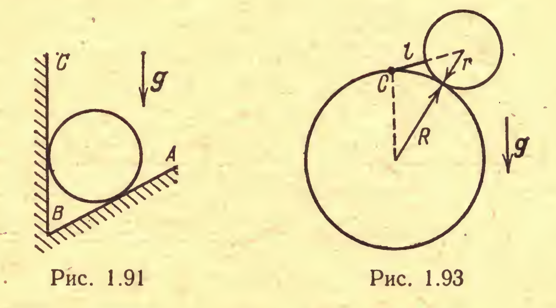


Рис. 1.91 Рис. 1.93

1.93°. Шарик радиуса r и массы m удерживается на неподвижном шаре радиуса R невесомой нерастяжимой нитью длины l, закрепленной в верхней точке C шара (рис. 1.93). Других точек соприкосновения между нитью и шаром нет. Найти силу натяжения нити. Трением пренебречь.

1.94. 1. Два шарика массы m_1 и m_2, соединенные невесомым жестким стержнем длины l, покоятся в сферической полости радиуса R. Под каким углом α к горизонту расположится стержень? Трением пренебречь.

2. В гладкой закрепленной полусфере свободно лежит стержень массы m, так что его угол с горизонтом равен α, а один конец выходит за край полусферы. Найти силы, с которыми действует стержень на полусферу в точках соприкосновения с ней.

1.95°. Динамометр D поставили между двумя отрезками троса ABC и AEC так, что он находится на диагонали BE ромба (рис. 1.95). Точка C закреплена. Найти силу, которая приложена к точке A, если динамометр показывает силу F_0. $\angle EAB = \angle BCE = \alpha$.

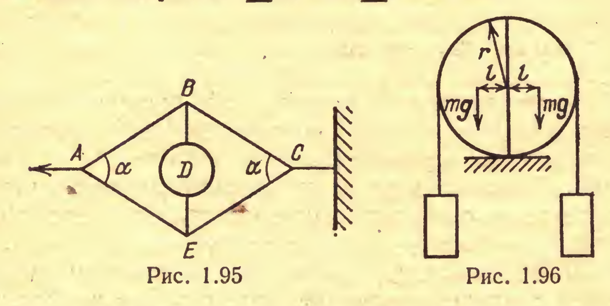


Рис. 1.95 Рис. 1.96

1.96°. Цилиндр радиуса r, лежащий на подставке, разрезан пополам по вертикальной плоскости, проходящей через его ось. Масса каждой половины цилиндра равна m, а их центры тяжести находятся на расстоянии l от оси цилиндра. Чтобы цилиндр не распался, через него перекинули невесомую нерастяжимую нить с одинаковыми грузами на концах (рис. 1.96). Найти минимальную массу грузов, не допускающих распада цилиндра. Трением пренебречь.

1.97. Однородная нить массы m свободно висит так, что оба ее конца закреплены и находятся на одной высоте. Сила натяжения нити в нижней точке равна T_0. Найти силу натяжения нити вблизи точек подвеса.

1.98. Концы нерастяжимой невесомой нити длины L закреплены в точках A и B, находящихся на разных уровнях (рис. 1.98). На нить надета тяжелая бусинка C.

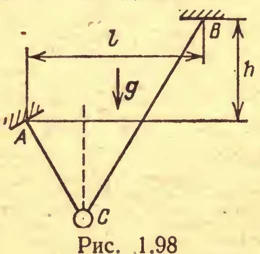


Рис. 1.98

Пренебрегая размером бусинки и трением, найти расстояние от точки A до вертикали, проходящей через бусинку. Параметры l и h, указанные на рисунке, считать известными.

1.99*. Ракета с конической носовой частью движется в пылевом облаке с постоянной скоростью $\vec{v}$, направленной вдоль ее оси. Плотность облака равна ρ. Площадь поперечного сечения ракеты равна S, угол раствора конической части равен 2α. Найти силу тяги, развиваемую двигателем ракеты. Столкновения пылинок с корпусом ракеты считать упругими.

1.100. Ракета равномерно движется сквозь разреженное облако пыли. Во сколько раз нужно увеличить силу тяги, чтобы скорость ракеты стала вдвое больше?

1.101*. Два шара, сделанные из одного материала, падают на землю, замедляясь в разреженном облаке пыли. Во сколько раз установившаяся скорость одного шара больше скорости другого, если радиус его вдвое больше? Учитывать только сопротивление, оказываемое пылинками (а не воздухом).

1.102. Тяжелый прут согнули в середине под углом 90° и подвесили свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует прикрепленный конец?

1.103. Однородный стержень массы m одним концом опирается на горизонтальную, другим — на наклонную плоскость. Угол между плоскостями равен α. Какую силу, направленную вдоль наклонной плоскости, надо приложить к одному из концов стержня, чтобы он находился в равновесии? Трением пренебречь.

1.104°. В вертикальную стенку вбиты два гвоздя A и B, на которые сверху опирается стоящий у стены гладкий круглый обруч массы m с центром в точке O

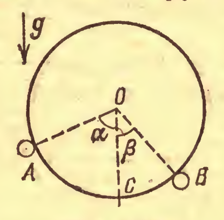


Рис. 1.104

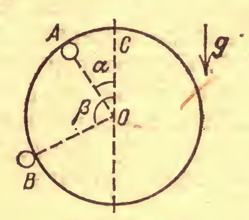


Рис. 1.105

(рис. 1.104). Найти силы, действующие на каждый из гвоздей, если радиусы OA и OB составляют с вертикалью OC углы α и β соответственно. Трением пренебречь.

1.105°. Гладкий круглый тонкий обруч массы m удерживается у стенки в вертикальном положении с помощью двух гвоздей. Первый из них расположен внутри обруча (точка A) и касается его так, что радиус, проведенный в точку касания A, составляет с вертикалью угол $\angle AOC=\alpha$ (рис. 1.105). Второй гвоздь находится вне обруча (точка B). Соответствующий угол $\angle BOC=\beta$. Найти, с какой силой обруч действует на каждый гвоздь. Трением пренебречь.

1.106. Два гладких шара массы m_1 и m_2 подвешены на невесомой нерастяжимой нити к одной и той же точке O, как показано на рис. 1.106. Радиус большого шара равен r, длина нити, его удерживающей, равна l. Какой угол эта нить образует с вертикалью?

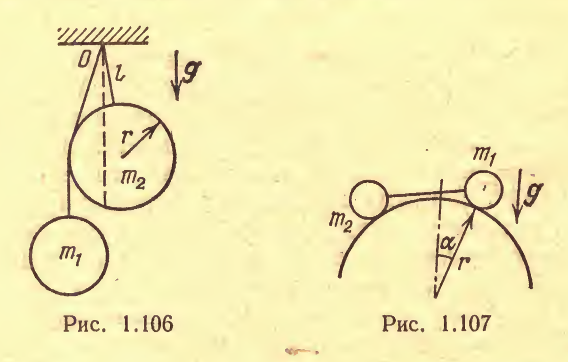


Рис. 1.106 Рис. 1.107

1.107°. Грузы неизвестных масс m_1 и m_2 соединены короткой невесомой и нерастяжимой нитью длины l и размещены на гладкой цилиндрической поверхности радиуса r (рис. 1.107). При равновесии угол между вертикалью и радиусом, проведенным в точку, где находится груз массы m_1, равен α. Найти отношение масс грузов.

1.108. Однородная балка массы M и длины L подвешена за концы на двух пружинах. Обе пружины в ненагруженном состоянии имеют одинаковую длину, но при действии одинаковой нагрузки удлинение правой пружины в n раз больше, чем удлинение левой. На каком расстоянии l от левого конца балки надо положить груз массы m, чтобы балка приняла горизонтальное положение?

1.109. Чтобы сдвинуть контейнер влево, к центру его правой стороны, перпендикулярно ей, необходимо приложить силу $F_1=10^2$ Н, а чтобы сдвинуть его вправо,

нужно приложить к центру левой стороны, перпендикулярно ей, силу $F_2 = 1{,}5 \cdot 10^2$ Н (рис. 1.109). Найти массу контейнера. Левые опоры, в отличие от правых, сделаны на роликах, обеспечивающих пренебрежимо малое трение. Размеры опор малы. Контейнер считать однородным кубом.

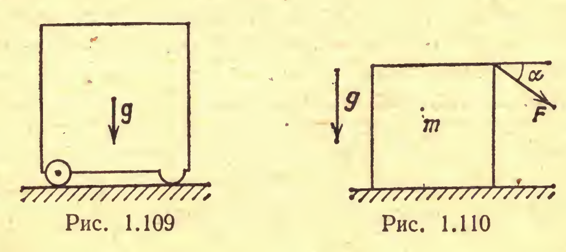


Рис. 1.109 Рис. 1.110

1.110. На горизонтальной поверхности стоит куб (рис. 1.110). С какой минимальной силой и под каким углом к горизонту α нужно тянуть куб за верхнее ребро, чтобы он опрокинулся без проскальзывания, если коэффициент трения равен k, а масса куба равна m?

1.111*. Опорами однородного бруска массы m являются два полуцилиндра, левый из которых имеет коэффициент трения о стол, равный k_1, а правый — k_2 (рис. 1.111). Какую горизонтальную силу F надо приложить к бруску, чтобы он двигался равномерно? Размерами опор пренебречь. Параметры l и d, указанные на рисунке, считать известными.

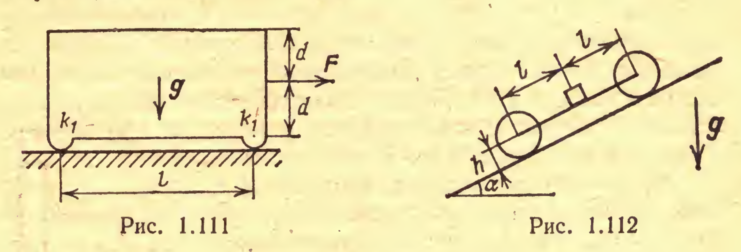


Рис. 1.111 Рис. 1.112

1.112*. Небольшой груз массы m закреплен посередине невесомой тележки высоты h. Расстояния от него до обеих осей тележки равны l. Тележка катится по наклонной плоскости с углом при основании α (рис. 1.112). В некоторый момент с помощью тормозных колодок мгновенно останавливают вращение колес тележки. Коэффициент трения скольжения передних колес о плос-

кость равен k_1, задних — k_2. При каком угле α тележка начнет двигаться равномерно?

1.113. На ось радиуса r с жестко закрепленными на ней колесами радиуса R давит пресс с силой $\boldsymbol{F}$ (рис. 1.113). Коэффициент трения между осью и прессом, а также между колесами и горизонтальной плоскостью равен k. Ось тянут за трос OA. Какую работу нужно совершить, чтобы сдвинуть ось на расстояние $l < R$? Силой тяжести пренебречь.

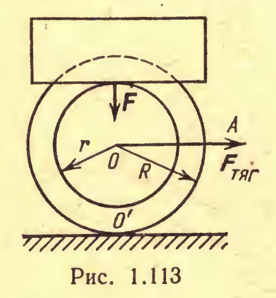


Рис. 1.113

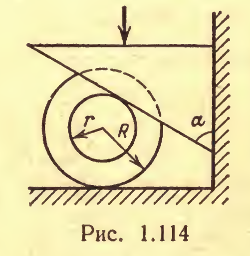


Рис. 1.114

1.114. На катушку, лежащую на горизонтальном столе, давит клин, который может смещаться только вдоль вертикальной плоскости (рис. 1.114). Коэффициент трения катушки о клин и стол равен k. При каком значении коэффициента k катушка сдвинется влево, вращаясь против часовой стрелки? Силой тяжести, действующей на катушку, пренебречь.

1.115*. На горизонтальном столе находится лист бумаги, прижатый однородным стержнем массы m, верхний конец которого шарнирно закреплен. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к листу, чтобы вытащить его? Угол между стержнем и листом равен α, коэффициент трения между ними равен k. Трением между столом и бумагой пренебречь.

1.116*. Жесткий стержень длины l может свободно поворачиваться вокруг оси O, закрепленной на расстоянии l от гладкой вертикальной стенки (рис. 1.116). Между стержнем и стенкой зажат брусок толщины h. При какой толщине бруска его невозможно протянуть вниз, если коэффициент трения между стержнем и бруском равен k?

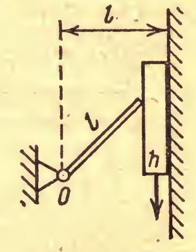
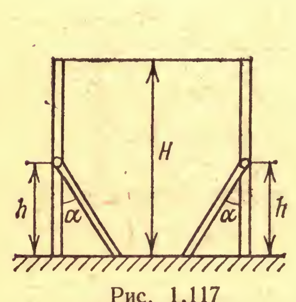
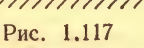


Рис. 1.116

1.117*. Два столба высоты H каждый вкопан в землю на небольшую глубину так, что вытащить столб можно, приложив вертикальную силу F_0. Чтобы повысить устойчивость, к столбам на высоте h шарнирно прикреплены жесткие подпорки, образующие угол α с вертикалью (рис. 1.117). С какой максимальной силой можно натянуть трос между верхушками столбов? Изменением вертикальной силы $F < F_0$, действующей на столбы при натяжении троса, пренебречь.




Рис. 1.117

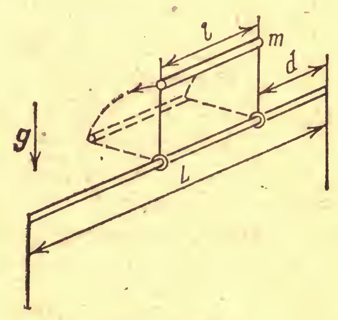


Рис. 1.118

1.118. Брусок длины l массы m подвешен на двух параллельных невесомых жестких стержнях, соединенных шарниром с перекладиной длины L, стоящей на опорах (рис. 1.118). Правый стержень находится на расстоянии d от правого конца перекладины. Брусок начинает движение из наивысшего положения без начальной скорости. Найти максимальную разность сил, действующих на правую и левую опоры перекладины. Прогибом перекладины и трением пренебречь.

1.119. На краю стола лежит однородный брусок массы M и длины L, выступающий за край на расстояние d. Брусок закреплен на шарнире и может вращаться вокруг края стола. К концу бруска подвешен на нити длины l груз массы m. Груз отклонили на некоторый угол α и затем отпустили. При каком угле α брусок начнет поворачиваться? ($0° < \alpha < 90°$.)

1.120*. На верхнюю точку закрепленного шара поставлен «ванька-встанька». Нижняя поверхность игрушки — полушар такого же радиуса, а центр тяжести ее — точка C, расположен на половине вертикального радиуса полушара. Упадет ли «ванька-встанька» с шара? Проскальзывания нет.

§ 6. Механика жидкости и газа

1.121°. Из шланга, наклоненного под углом α к горизонту, бьет со скоростью $\boldsymbol{v}$ вода. Найти массу воды, находящейся в данный момент в воздухе, если площадь сечения отверстия шланга равна S, высота его над землей равна h, плотность воды равна ρ_0.

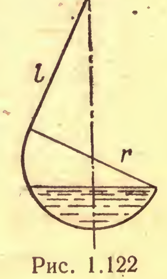


Рис. 1.122

1.122. «Половник», наполненный тяжелой жидкостью, аккуратно подвесили за конец ручки (рис. 1.122). Часть жидкости при этом вылилась. Найти объем жидкости, оставшейся в «половнике», если черпалка «половника» имеет форму полусферы радиуса r, а ручка, касательная к полусфере, имеет длину $l=\sqrt{8}r$. Массой «половника» пренебречь.

1.123*. На тележке стоит сосуд с высокими стенками и квадратным дном, имеющим сторону l. Нижнее ребро дна сосуда шарнирно закреплено. В сосуд налита жидкость до уровня $h>l/2$. Тележку тянут с ускорением $\boldsymbol{a}$, придерживая сосуд. Когда поверхность жидкости успокаивается, сосуд отпускают. При какой минимальной высоте уровня жидкости сосуд опрокинется? Массой сосуда пренебречь.

1.124°. Поршень выгоняет воду из вертикального цилиндрического сосуда через малое отверстие, находящееся у дна сосуда и имеющее площадь S_0. Высота сосуда равна h, площадь основания — S. Какую работу совершает поршень, если он движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$? Учесть действие силы тяжести.

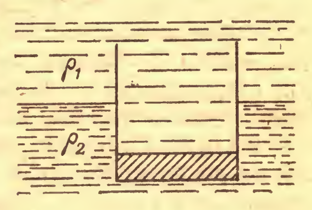


Рис. 1.125

1.125°. Тонкостенный стакан массы m, расположенный вертикально вниз дном, плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1.125). Найти глубину погружения стакана в нижнюю жидкость, если дно стакана имеет толщину h и площадь S. Массой стенок стакана пренебречь.

1.126°. Цилиндрический сосуд заполнен двумя неперемешивающимися жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2. В жидкость погружается куб с длиной ребра l. Найти

глубину погружения куба в жидкость с плотностью ρ_2, если плотность вещества куба равна ρ ($\rho_2 > \rho > \rho_1$).

1.127. На дне сосуда, наполненного жидкостью, плотность которой равна ρ, стоит Г-образное тело (размеры указаны на рис. 1.127). Жидкость под нижнюю грань не подтекает. Плотность тела равна 2ρ. При какой высоте уровня жидкости в сосуде равновесие тела нарушается?

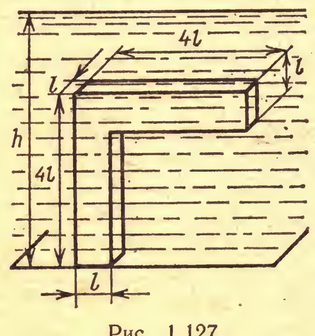


Рис. 1.127

1.128. В стенке цилиндрического сосуда радиуса R, наполненного водой до высоты h, возле дна имеется отверстие, закрытое пробкой. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть пробку в сосуд на длину l? Пробка имеет форму цилиндра радиуса r и длины, большей l. Трение не учитывать. Плотность воды равна ρ_0. Сосуд достаточно высок, так что вода из него не выливается.

1.129. В прямоугольный высокий сосуд налита жидкость плотности ρ. В одной из стенок у дна сосуда имеется прямоугольное отверстие высоты h, в которое вдвинута на расстояние l невесомая пробка того же сечения. Между пробкой и дном сосуда жидкость не проникает. При какой высоте уровня жидкости над пробкой жидкость не сможет ее вытолкнуть? Коэффициент трения пробки о дно сосуда равен k. Атмосферное давление равно p_0. Трением пробки о стенки сосуда пренебречь.

1.130. В сосуде, наполненном водой плотности ρ_0, на дне, представляющем собой наклонную плоскость, стоит металлический кубик плотности ρ. Найти силу давления кубика на дно. Расстояние от верхнего ребра кубика до поверхности воды равно h, угол наклона дна к горизонту равен α. Между дном и нижней гранью кубика вода не проникает. Ребро кубика равно l.

1.131°. На дне сосуда на одной из своих боковых граней лежит треугольная призма. В сосуд налили жидкость плотности ρ_0, причем ее уровень сравнялся с верхним ребром призмы. Какова плотность материала призмы, если сила давления призмы на дно сосуда увеличилась в три раза? Жидкость под призму не подтекает.

1.132. Одна из стенок прямоугольного сосуда с водой образована бруском. Брусок представляет собой призму,

в плоскостях боковых сторон сосуда имеющую сечение в виде равнобедренного прямоугольного треугольника, и может перемещаться по дну сосуда (рис. 1.132). Считая, что трение между бруском и боковыми стенками отсутствует, найти минимальный коэффициент трения между основанием сосуда и бруском, при котором брусок придет в движение. Длина бруска $l=20$ см, его масса $m=90$ г, угол при вершине призмы $\alpha=45°$, высота столба воды $h=1$ см, плотность воды $\rho_0=1$ г/см³.

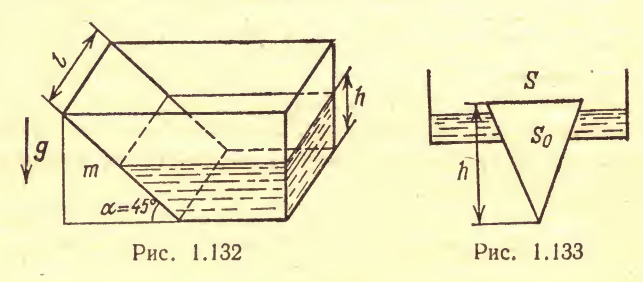


Рис. 1.132 Рис. 1.133

1.133. Круглое отверстие в дне сосуда закрыто конической пробкой с сечением основания S (рис. 1.133). При какой наибольшей плотности материала пробки ρ можно, доливая воду, добиться всплытия пробки? Площадь отверстия равна S_0, плотность воды равна ρ_0. Поверхностным натяжением пренебречь. Объем конуса, имеющего площадь основания S и высоту h, равен $hS/3$.

1.134*. 1. Трубка радиуса r, закрытая снизу алюминиевой пластинкой, имеющей форму цилиндра радиуса R и высоты h, погружена в воду на глубину H (рис. 1.134). Расстояние между осями трубки и пластинки равно d. Давление воды прижимает пластинку к трубке. До какой высоты следует налить в трубку воду, чтобы пластинка отвалилась? Плотность воды равна ρ_0, алюминия — ρ.

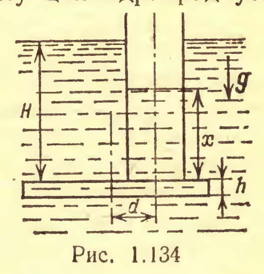


Рис. 1.134

2. Алюминиевая пластинка заменена деревянной. До какой высоты следует налить в трубку воду, чтобы пластинка всплыла? Плотность дерева равна ρ.

1.135*. 1. Трубка радиуса r, закрытая снизу алюминиевой клиновидной пластинкой, в сечении образующей прямоугольный треугольник с катетами a и b, погружена

в воду на глубину H (рис. 1.135). Верхняя грань клина представляет собой квадрат со стороной a, причем ось трубки проходит через середину квадрата. Давление воды прижимает клин к трубке. До какой высоты следует налить в трубку воду, чтобы клин отвалился? Плотность воды равна ρ_0, плотность алюминия — ρ.

2. Алюминиевый клин заменен деревянным. До какой высоты следует налить воду в трубку, чтобы клин всплыл? Плотность дерева равна ρ.

1.136°. В U-образную трубку, имеющую сечение S, налита жидкость плотности ρ. На сколько поднимется уровень жидкости в правом колене трубки по отношению к первоначальному уровню, если в левое колено опустили тело массы m и плотности, меньшей плотности жидкости, которое может свободно в нем плавать? Капиллярными явлениями пренебречь.

1.137*. В U-образной трубке с соприкасающимися внутренними стенками в равновесии находятся жидкости

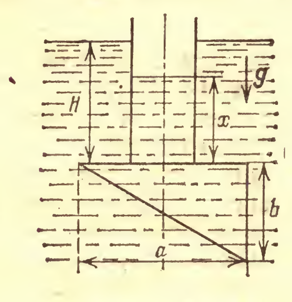


Рис. 1.135

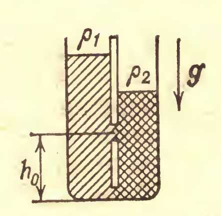


Рис. 1.137

с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) так, что граница раздела между ними проходит через центр дна трубки (рис. 1.137). На высоте h_0 от нижней точки трубки во внутренних стенках появилось небольшое отверстие и началось перетекание жидкости. На сколько изменится после перетекания уровень в колене с жидкостью ρ_2? Считать трубку тонкой и перемешивание жидкостей невозможным (возможен только разрыв столба жидкости в месте появления отверстия).

1.138. Ртуть в барометре заменили на сжимаемую жидкость, плотность которой в результате действия силы тяжести зависит от глубины h по закону $\rho = \rho_0 (1 + \alpha h)$. Какова будет высота столба этой жидкости при атмосферном давлении p?

1.139. В цилиндрический сосуд, площадь основания которого равна S, налита сжимаемая жидкость массы M, плотность ρ которой в результате действия силы тяжести зависит от глубины h по закону $\rho=\rho_0(1+\alpha h)$. На сколько изменится высота столба жидкости, если в нее опустить кубик массы m, который при этом не ложится на дно?

1.140°. Определить силу натяжения вертикального троса, медленно вытягивающего конец бревна массы $m=240$ кг из воды, если бревно при вытягивании все время затоплено лишь наполовину (то есть происходит лишь разворот бревна вокруг его центра).

1.141°. Шар, до половины погруженный в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной трети действующей на него силы тяжести. Найти плотность шара.

1.142°. К коромыслу равноплечих весов подвешены два груза одинаковой массы. Если каждый из грузов

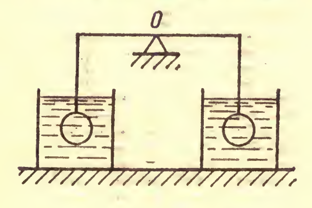


Рис. 1.142

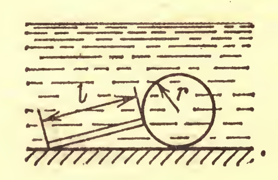


Рис. 1.144

поместить в жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2, то равновесие сохранится (рис. 1.142). Найти отношение плотностей грузов.

1.143°. Два шара одинакового объема, но разной плотности закреплены на концах стержня, шарнирно подвешенного в центре. Шарнир находится на поверхности воды, при этом один шар погрузился в воду на три четверти своего объема, а другой — на одну четверть. Найти плотность более тяжелого шара ρ_2, если плотность легкого равна ρ_1. Плотность воды равна ρ_0.

1.144°. На горизонтальном дне бассейна под водой лежит невесомый шар радиуса r с тонкой тяжелой ручкой длины l, опирающейся о дно (рис. 1.144). Найти наименьшую массу ручки, при которой шар еще лежит на дне. Плотность жидкости равна ρ_0.

1.145°. Шар массы m и радиуса r полностью погружен в жидкость и прикреплен к гладкой вертикальной

стене с помощью нити длины $l=r$. Если шар отпустить, он будет плавать, наполовину погрузившись в жидкость. С какой силой прикрепленный шар давит на вертикальную стенку?

1.146°. С какой силой давит на стенку цилиндрического стакана палочка массы m, наполовину погруженная в воду и не достающая до дна? Угол наклона палочки к горизонту равен α. Трением пренебречь.

1.147°. Треугольная призма, объем которой равен V, а плотность материала — ρ_1, погружена в жидкость плотности $\rho_2>\rho_1$ (рис. 1.147); призма всплывает с постоянной скоростью, скользя по тонкому слою жидкости вдоль стенки, угол наклона к горизонту которой равен углу α призмы при вершине. Найти силу сопротивления движению. Угол при основании призмы равен 90°.

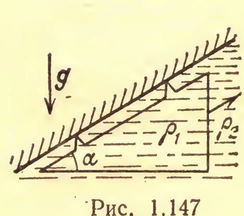


Рис. 1.147

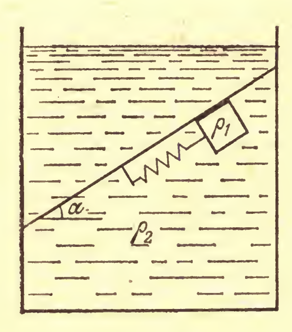


Рис. 1.148

1.148°. Кубик плотности ρ_1 удерживается в равновесии невесомой пружиной под наклонной стенкой, угол наклона которой равен α, в жидкости плотности $\rho_2>\rho_1$. Между стенкой и кубиком — тонкий слой жидкости. Найти длину пружины, если в ненагруженном состоянии ее длина равна l_0, а в нагруженном состоянии, когда кубик подвешен к пружине в отсутствие жидкости, ее длина равна l (рис. 1.148).

1.149*. Заполненный водой цилиндрический сосуд радиуса R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. На дне его лежит шар радиуса $r<R/2$ и плотности ρ. С какой силой шар давит на боковую стенку цилиндра? Ось цилиндра вертикальна, плотность воды равна ρ_0.

1.150*. Закрытый цилиндрический сосуд, наполненный на три четверти объема водой, вращается вокруг своей оси так, что в его центре образовалась цилиндрическая полость. В воде плавает, погрузившись на две трети своей длины l, тонкий стержень AB (рис. 1.150).

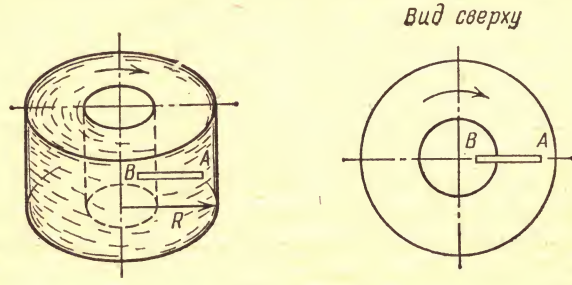


Рис. 1.150

Найти плотность стержня. Радиус цилиндра равен R, длина стержня $l < 3R/4$, плотность воды равна ρ_0. Силой тяжести пренебречь.

1.151. На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения, имеющий плотность

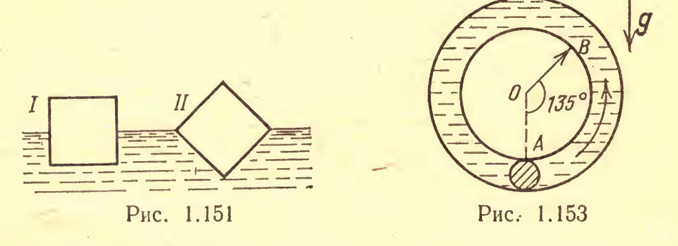


Рис. 1.151 Рис. 1.153

$\rho = 0,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Какое из двух положений равновесия, показанных на рис. 1.151, будет устойчивым и почему?

1.152*. Цилиндрический стакан до высоты h заполнен кусочками льда. Поры между кусочками льда сквозные и в исходном состоянии заполнены воздухом. Льдинки занимают долю объема $\alpha = 60\%$. Лед начинает таять, причем соотношение объемов льдинок и пор между ними остается неизменным. Найти высоту уровня воды в стакане в момент, когда растаяла доля льда $\beta = 70\%$. Плотность сплошного льда $\rho = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_0 = 1 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.153. Трубка, диаметр которой много меньше длины, свернута в кольцо радиуса r и заполнена водой вся, за

исключением небольшого участка в нижней точке трубки (точка A), заполненного маслом (рис. 1.153). Плоскость кольца вертикальна. В начальный момент масляная пробка начинает всплывать в направлении к точке B. Найти ее скорость в момент, когда она проходит мимо точки B. $\angle AOB=135°$. Плотность масла равна ρ, плотность воды — ρ_0. Длина масляной пробки $l \ll r$. Трением о стенки трубки пренебречь. Просачивание воды сквозь пробку отсутствует.

1.154. В U-образной трубке постоянного сечения колеблется жидкость плотности ρ. Жидкость занимает участок трубки длины l. Найти давление на глубине H в вертикальном участке правого колена в момент, когда уровень жидкости в правом колене выше, чем в левом на величину h.

1.155*. Струя воды в фонтане поднимается на высоту H над уровнем выходной трубы насоса. К этой выходной

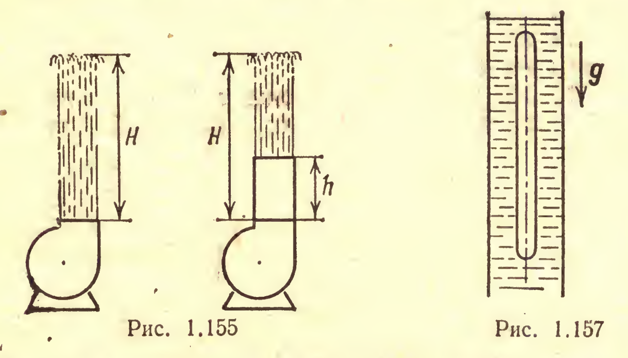


Рис. 1.155

Рис. 1.157

трубе подсоединяют вертикальную трубу такого же диаметра и имеющую высоту $h<H$ (рис. 1.155). Во сколько раз следует изменить после подсоединения дополнительной трубы мощность насоса, чтобы суммарная высота подсоединенной трубы и вылетающей из нее струи воды стала равной H. Потерями энергии на трение пренебречь.

1.156. Брусок массы m удерживается в воздухе n струями воды, бьющими вертикально вверх из отверстий, имеющих сечение S. Скорость воды на выходе из отверстий равна $\boldsymbol{v}$. Достигая бруска, вода разлетается от него в горизонтальной плоскости. На какой высоте над отверстиями удерживается брусок? Плотность воды равна ρ_0. Струю воды считать несжимаемой.

1.157*. В вертикальной трубе радиуса R, заполненной жидкостью плотности ρ_1, вдоль оси трубы всплывает

круглый стержень радиуса r и длины l, причем $l \gg R$ (рис. 1.157). Плотность стержня $\rho_2 < \rho_1$. Пренебрегая концевыми эффектами и трением, найти скорость и ускорение стержня в зависимости от пройденного расстояния h, если в начальный момент времени он покоился.

1.158*. В трубке переменного сечения поддерживается неизменное во времени течение вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ. В сечениях I и II, площади которых равны S_1 и S_2 соответственно, скорость жидкости можно считать постоянной по сечению. Найти силу, с которой жидкость действует на участок трубы между сечениями I и II, и количество теплоты, которое выделяется в единицу времени в объеме трубы между этими сечениями. Давление и скорость жидкости в сечении I равны p_1 и v_1; в сечении II давление равно p_2.

1.159*. Труба радиуса r заполнена пористой средой плотности ρ_1. Невесомый поршень, на который действует сила F, вдвигаясь в трубу, уплотняет среду до плотности ρ_2. С какой скоростью движется поршень, если уплотнение происходит скачком, то есть по среде перемещается с некоторой скоростью поверхность S, по одну сторону от которой плотность среды равна ρ_1, а по другую — равна ρ_2? В начальный момент поверхность S совпадает с поршнем.

1.160. В U-образную трубку налиты две жидкости различных плотностей. Линия раздела жидкости проходит через нижнюю точку трубки. Высота столба жидкости в правом колене равна h_1. Найти максимальную скорость жидкости, если в начальный момент уровень жидкости, находящейся в правом колене, был опущен относительно равновесного на расстояние h_0. Трением пренебречь.

Глава II. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 1. Газовые законы

2.1°. Основаниями цилиндрического сосуда, из которого откачан воздух, являются две крышки площади S, каждую из которых тянут 16 лошадей. Каково ускорение лошадей в момент отрыва крышки? Атмосферное давление равно p_0. Масса каждой лошади равна m.

2.2°. Тяжелый поршень массы m вставляют в открытый сверху стоящий вертикально цилиндрический сосуд,

площадь сечения которого S равна площади поршня, и отпускают. Найти давление в сосуде в момент, когда скорость поршня максимальна. Атмосферное давление равно p_0. Трением пренебречь.

2.3. Две полусферы соединены в сферу, из которой частично откачан воздух, и подвешены в точке полюса. Полусферы оторвутся друг от друга, если к точке противоположного полюса подвесить груз массы M. До какой температуры нужно нагреть воздух внутри сферы, чтобы она развалилась без дополнительного груза? Масса каждой полусферы равна m, наружный радиус равен r, атмосферное давление равно p_0, начальная температура воздуха и сферы равна T_0. Тепловым расширением сферы пренебречь.

2.4°. В цилиндрический открытый сосуд налита неиспаряющаяся жидкость. При температуре $t_0=0\,°C$ давление на дно сосуда равно p_0. Найти давление на дно сосуда при температуре t, если температурный коэффициент линейного расширения материала сосуда равен α. Уровень жидкости остается все время ниже края сосуда.

2.5*. На крыше, наклоненной к горизонту под углом $\varphi=30°$, лежит свинцовый лист массы m. Коэффициент трения свинца о крышу $k=0{,}7$ ($k>\operatorname{tg}\varphi$). Длина листа при температуре $t_1=10\,°C$ $l=1$ м. Считая, что температура листа в течение суток повышается, достигая наивысшего значения $t_2=20\,°C$, а потом понижается до значения t_1, определить положение точек листа, неподвижных в течение суток при нагревании и при остывании. Найти расстояние, на которое сползет лист за $n=30$ суток устойчивой погоды. Температурный коэффициент линейного расширения свинца $\alpha=3\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

2.6. В запаянной с одного конца трубке сечения S на расстоянии l от запаянного конца находится поршень массы m. Другой конец трубки открыт, по обе стороны поршня — воздух, давление которого равно p_0. Трубку начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через запаянный конец трубки. На каком расстоянии от запаянного конца трубки будет находиться поршень? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.

2.7°. В открытом цилиндрическом сосуде между поршнями A и B (рис. 2.7) находится идеальный газ. Над поршнем B находится жидкость плотности ρ, заполняющая сосуд до верха. Высота столба жидкости равна H_1. На какое расстояние надо сместить вверх поршень A,

чтобы над поршнем B остался столб жидкости высоты H_2, если температура газа при этом остается постоянной. Первоначальное расстояние между поршнями равно h. Атмосферное давление равно p_0. Массой поршня B и трением поршней о стенки сосуда пренебречь.

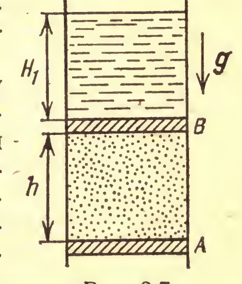


Рис. 2.7

2.8. Сосуд высоты $2h$, поровну разделенный горизонтальной перегородкой, содержит в верхней части воду, а в нижней — воздух при атмосферном давлении p_0. В перегородке открывается небольшое отверстие, такое, что вода начинает протекать в нижнюю часть сосуда. Какой толщины будет слой воды в нижней части сосуда в момент, когда воздух начнет проходить из отверстия вверх? Плотность воды равна ρ_0. Температуру воздуха считать постоянной.

2.9. В герметически закрытый цилиндрический сосуд высоты h через крышку вертикально вставлена немного не доходящая до дна сосуда тонкостенная трубка длины l. В первоначально сухой сосуд через трубку наливают воду. Найти высоту уровня воды в сосуде, при котором трубка заполнится водой. Атмосферное давление равно p_0, плотность воды равна ρ_0. Соединение трубки с крышкой сосуда герметично. Поверхностное натяжение не учитывать.

2.10°. В длинной узкой пробирке с воздухом, расположенной горизонтально, капелька ртути находится на расстоянии l_1 от дна. Если пробирку повернуть вверх отверстием, то капелька окажется на расстоянии l_2 от дна. На каком расстоянии от дна окажется капелька, если перевернуть пробирку вверх дном? Температуру воздуха считать постоянной.

2.11. Участки AB и CD вертикальной запаянной с концов узкой стеклянной трубки $ABCDEF$ заполнены воздухом, участки BC и DE — ртутью, в участке EF — вакуум (рис. 2.11). Длины всех участков одинаковы. Давление в нижней точке A равно p. Трубку осторожно переворачивают так, что точка F оказывается внизу. Каким станет давление в точке F? Температуру воздуха считать постоянной.

2.12. В U-образной трубке с воздухом на одинаковой высоте h удерживают два поршня массы m каждый (рис. 2.12). Площадь сечения левого колена трубки рав-

на $2S$, площадь сечения правого колена и нижней части трубки равна S. Длина нижней части равна $3h$. Давление воздуха в трубке p_0 равно атмосферному. Поршни отпускают. Найти установившиеся высоты поршней.

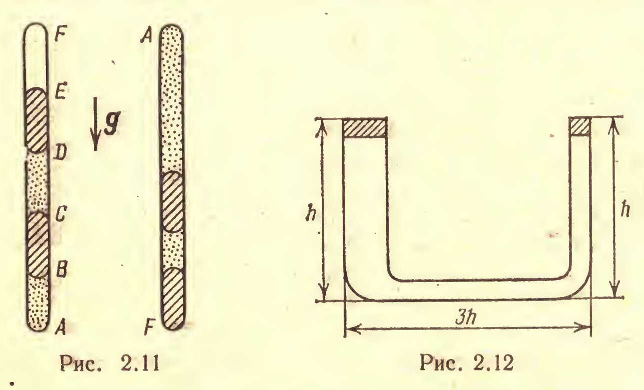


Рис. 2.11 Рис. 2.12

Поршни могут перемещаться только по вертикальным участкам трубки. Температуру воздуха считать постоянной.

2.13. Прямоугольный сосуд с непроницаемыми стенками разделен вертикальным подвижным легким поршнем на две части: слева находится ртуть, справа — воздух. В начальный момент поршень находится в равновесии и делит сосуд на две равные части длины l. На сколько сместится поршень вправо после увеличения температуры (по шкале Кельвина) в три раза? Тепловым расширением ртути и сосуда, а также трением пренебречь.

2.14°. Между поршнем и дном закрытого цилиндрического сосуда, заполненного воздухом, закреплена перегородка с отверстием, закрытым пробкой. Давление воздуха между перегородкой и дном сосуда равно p_1. Массы воздуха по обе стороны от перегородки одинаковы. При движении поршня пробка вылетает, когда разность давлений по обе стороны от перегородки становится равной Δp. В этот момент поршень останавливают. Найти установившееся в сосуде давление p_2. Температуру воздуха считать постоянной.

2.15. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде, заполненном воздухом, находятся в равновесии два тонких одинаковых тяжелых поршня. Расстояние между поршнями и расстояние от нижнего поршня до дна сосуда одинаковы и равны $l=10$ см, давление между поршня-

ми равно удвоенному нормальному атмосферному давлению p_0. На верхний поршень давят таким образом, что он перемещается на место нижнего. На каком расстоянии от дна будет находиться нижний поршень? Температуру воздуха считать постоянной. Трением пренебречь.

2.16. Два расположенных горизонтально цилиндрических сосуда, соединенных герметически, перекрыты поршнями, соединенными несжимаемым стержнем. Между поршнями и вне их находится воздух при атмосферном давлении p_0. Площади поршней равны S_1 и S_2. Первоначальный объем воздуха между поршнями равен V_0 (рис. 2.16). На сколько сместятся поршни, если давление в камере A повысить до значения p? Температуру воздуха считать постоянной. Трением пренебречь. Давление в камере B остается равным атмосферному.

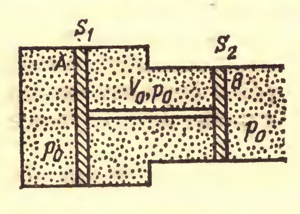


Рис. 2.16

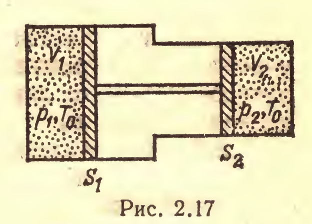


Рис. 2.17

2.17. В двух соединенных герметически цилиндрических сосудах различного поперечного сечения, закрытых поршнями, находятся идеальные газы при одной и той же температуре. Поршни жестко связаны между собой стержнем и находятся в равновесии. Между поршнями — вакуум. Расстояния от дна сосудов до поршней одинаковы (рис. 2.17). Температуру газа в каждом цилиндре изменили, после чего поршни сместились вправо на половину расстояния между поршнем и дном. Найти отношение температур газов (по шкале Кельвина).

2.18. В шероховатую трубу, площадь сечения которой равна S, вставляют пробку и проталкивают ее внутрь стержнем на всю его длину. Затем вставляют и проталкивают точно такую же вторую пробку, а затем третью. Найти силу трения между стенками трубы и пробкой, если в результате первая пробка оказалась на расстоянии двойной длины стержня от левого конца трубы (рис. 2.18). Атмосферное давление равно p_0. Температуру воздуха считать постоянной. Толщиной пробок пренебречь.

2.19*. Цилиндрическая камера длины $2l$ с поршнем, площадь сечения которого равна S, может двигаться по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k (рис. 2.19). Слева от поршня, расположенного в центре

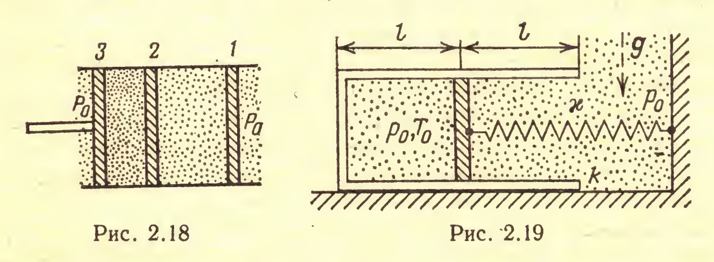


Рис. 2.18

Рис. 2.19

камеры, находится газ при температуре T_0 и давлении p_0. Между неподвижной стенкой и поршнем помещена пружина жесткости $\varkappa$. Во сколько раз нужно увеличить температуру газа слева от поршня, чтобы объем этого газа удвоился, если трением между камерой и поршнем можно пренебречь. Масса камеры и поршня равна m. Наружное давление равно p_0.

2.20°. В вертикальном открытом сверху цилиндрическом сосуде, имеющем площадь поперечного сечения S, на высоте h от дна находится поршень массы m, поддерживаемый сжатым газом с молярной массой μ. Температура газа равна T, атмосферное давление равно p_0. Определить массу газа в сосуде. Трением пренебречь.

2.21. Закрытый цилиндрический сосуд, вместимость которого равна V, заполнен газом с молярной массой μ при температуре T. При свободном падении сосуда давление газа на дно равно p. Найти разность сил давления на дно и крышку в случае, когда сосуд покоится. Молярный объем газа при нормальных условиях, то есть при давлении p_0 и температуре T_0, равен V_0.

2.22°. В вертикальном закрытом цилиндрическом сосуде, площадь основания которого равна S, разделенном поршнем массы m на два отсека, находится газ. Масса газа под поршнем в n раз больше, чем над поршнем. В положении равновесия поршень находится посередине сосуда, а температура газа в обоих отсеках одинакова. Найти давление газа в каждом отсеке. Трением и силой тяжести, действующей на газ, пренебречь.

2.23. В вертикальном закрытом цилиндрическом сосуде, высота которого равна $2h$, а площадь основания — S, находится тяжелый поршень массы m. Первоначально

поршень, делящий объем сосуда пополам, уравновешен. Над поршнем находится гелий при давлении p_{He}, под поршнем — кислород. Поршень проницаем для гелия и непроницаем для кислорода. Через некоторое время поршень занимает новое равновесное положение, смещаясь вверх. Найти смещение поршня. Температуру газов считать постоянной. Трением пренебречь.

2.24. В блюдце налито $m=30$ г воды, а сверху на воду поставлен перевернутый вверх дном разогретый цилиндрический стакан с тонкими стенками. До какой наименьшей температуры должен быть нагрет стакан, чтобы после остывания его до температуры окружающего воздуха $T_0=300$ К в него оказалась бы втянута вся вода? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, площадь сечения стакана $S=20$ см², высота $H=10$ см, плотность воды $\rho_0=1\cdot 10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с². Явлением испарения, поверхностным натяжением и расширением самого стакана пренебречь.

§ 2. Пар

2.25°. В воду при $t_{01}=90$ °C бросают раскаленные платиновые опилки. Найти начальную температуру опилок t_{02}, если известно, что после прекращения кипения уровень воды остался первоначальным. Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}19\cdot 10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $\lambda_1=2{,}26\cdot 10^6$ Дж/кг при температуре кипения $t_{кип}=100$ °C, плотность платины $\rho_2=21{,}4\cdot 10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость платины $c_2=128$ Дж/(кг·К). Изменением плотности воды при нагреве пренебречь.

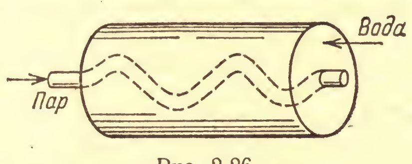


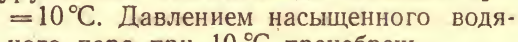
Рис. 2.26

2.26. Теплообменник представляет собой трубу, внутри которой находится змеевик. В змеевик в единицу времени поступает 1 кг водяного пара, то есть расход пара $q_1=1$ кг/с, при температуре $t_1=100$ °C. Навстречу пару движется вода, расход которой $q_2=10$ кг/с (рис. 2.26). Определить температуру воды на выходе из теплообмен-

ника, если на входе температура воды $t_2=20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Удельная теплота парообразования воды $\lambda=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

2.27. В герметично закрытом сосуде, вместимость которого $V_0=1{,}1$ л, находится $M=100$ г кипящей воды и пара при температуре $100\,^{\circ}\mathrm{C}$. Найти массу пара. Плотность воды равна ρ. Считать, что воздуха в сосуде нет.

2.28. Паровой котел частично заполнен водой, а частично — смесью воздуха и насыщенного пара при температуре $t_1=100\,^{\circ}\mathrm{C}$. Начальное давление в котле $p=3p_0=3\cdot10^5$ Па. Найти давление в котле в случае, когда температуру в нем понизили до значения $t_2=10\,^{\circ}\mathrm{C}$. Давлением насыщенного водяного пара при $10\,^{\circ}\mathrm{C}$ пренебречь.



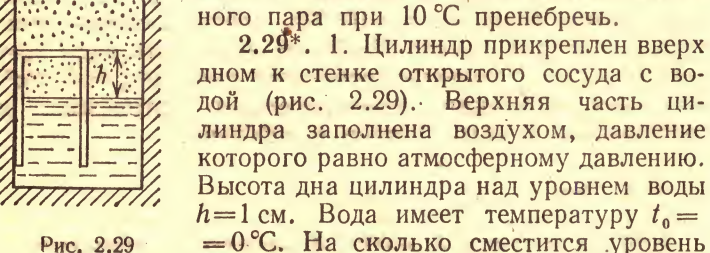


Рис. 2.29

2.29*. 1. Цилиндр прикреплен вверх дном к стенке открытого сосуда с водой (рис. 2.29). Верхняя часть цилиндра заполнена воздухом, давление которого равно атмосферному давлению. Высота дна цилиндра над уровнем воды $h=1$ см. Вода имеет температуру $t_0=0\,^{\circ}\mathrm{C}$. На сколько сместится уровень воды в цилиндре, если воду и воздух нагреть до $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ (но не доводить воду до кипения)? Тепловым расширением воды и сосуда, а также давлением водяного пара при $t_0=0\,^{\circ}\mathrm{C}$ пренебречь. Сосуд широкий.

2. В сосуде над поверхностью воды находится воздух, сжатый поршнем до давления $p_1=3\cdot10^5$ Па. Расстояние от поршня до поверхности воды и толщина слоя воды одинаковы: $h=2$ см. Температура воздуха и воды $t_1=6\,^{\circ}\mathrm{C}$. На каком расстоянии от поверхности воды окажется поршень, если трубку с водой нагреть до температуры $t_2=100\,^{\circ}\mathrm{C}$? Давлением водяного пара при температуре t_1 и трением пренебречь.

2.30. В цилиндрическом сосуде под поршнем вначале находится $\nu=1$ моль водяного пара при температуре T и давлении p. Давление насыщенного пара воды при этой температуре равно $2p$. Поршень вдвигают так, что первоначальный объем под поршнем уменьшается в четыре раза. Найти массу сконденсировавшейся воды, если температура остается неизменной. Молярная масса воды $\mu=18$ г/моль.

2.31°. На какую высоту нужно поднять поршень, закрывающий сосуд с водой, чтобы вся вода испарилась?

Толщина слоя воды равна h, плотность воды равна ρ, ее молярная масса равна μ, давление насыщенного водяного пара равно p. Температура воды и пара T поддерживается постоянной, воздуха в сосуде нет.

2.32. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный пар. Определить массу сконденсировавшегося при изотермическом вдвигании поршня пара, если при этом совершена работа A. Молярная масса пара равна μ.

2.33. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный пар. При изотермическом вдвигании в сосуд поршня выделилось количество теплоты Q. Найти совершенную при этом работу. Молярная масса пара равна μ, удельная теплота парообразования воды равна λ.

§ 3. Графики для тепловых процессов. Закон сохранения энергии в тепловых процессах

2.34. Идеальный газ участвует в некотором процессе, изображенном в p, V-координатах, проходя последовательно состояния 1, 2, 3, 4, 1 (рис. 2.34). Изобразить этот же процесс в p, T-координатах.

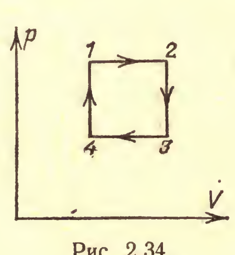


Рис. 2.34

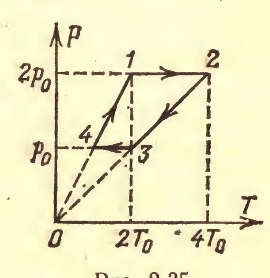


Рис. 2.35

2.35. Один моль идеального газа участвует в некотором процессе, изображенном в p, T-координатах, проходя последовательно состояния 1, 2, 3, 4, 1 (рис. 2.35). При этом $T_1=T_3=2T_0$, $T_4=T_0$, $T_2=4T_0$, $p_1=p_2=2p_0$, $p_3=p_4=p_0/2$. Найти работу, совершенную газом за этот цикл.

2.36. Один моль идеального газа участвует в некотором процессе, изображенном в p, V-координатах (рис. 2.36). Продолжения отрезков прямых 1—2 и 3—4 проходят

через начало координат, а кривые *1—4* и *2—3* являются изотермами. Изобразить этот процесс в T, V-координатах и найти объем V_3, если известны объемы V_1 и $V_2=V_4$.

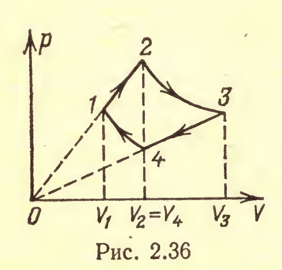


Рис. 2.36

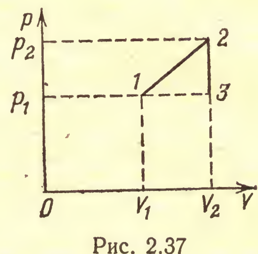


Рис. 2.37

2.37. Один моль газа, внутренняя энергия которого $U=cT$, участвует в некотором процессе, изображенном на рис. 2.37. Газ проходит последовательно состояния *1*, *2*, *3*. Найти поглощенное газом в этом процессе количество теплоты, если известны объемы V_1, V_2 и давления p_1, p_2.

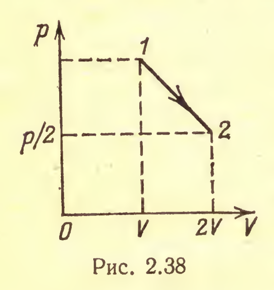


Рис. 2.38

2.38. На p, V-диаграмме изображен процесс расширения газа, при котором он переходит из состояния *1* с давлением p и объемом V в состояние *2* с давлением $p/2$ и объемом $2V$ (рис. 2.38). Найти количество теплоты Q, которое сообщили этому газу. Линия *1—2* — отрезок прямой.

2.39*. Один моль идеального газа, внутренняя энергия которого $U=(3/2)RT$, сначала нагревают, затем охлаждают так, что замкнутый цикл *1—2—3—1* на p, V-диаграмме состоит из отрезков прямых *1—2* и *3—1*, параллельных осям p и V соответственно и изотермы *2—3*. Найти количество теплоты, отданное газом в процессе охлаждения. Давление и объем газа в состоянии *1* равны p_1 и V_1, давление газа в состоянии *2* равно p_2.

2.40. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндрический сосуд массы m перегорожен подвижным поршнем массы $M \gg m$. С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого $U=cT$. Коротким ударом сосуду сообщают скорость $\boldsymbol{v}$, направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний

поршня? Трением между поршнем и стенками сосуда, а также теплоемкостью поршня пренебречь.

2.41*. В длинной закрытой трубке между двумя поршнями массы m каждый находится идеальный газ, масса которого много меньше массы поршней. В остальном

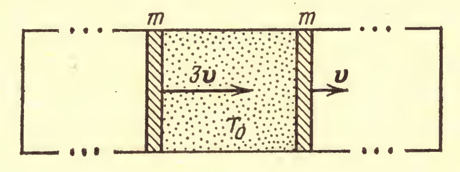


Рис. 2.41

пространстве трубки — вакуум. В начальный момент правый поршень имеет скорость $\boldsymbol{v}$, а левый — $3\boldsymbol{v}$ (рис. 2.41). Найти максимальную температуру газа, если стенки трубки и поршни теплонепроницаемы. Температура газа в начальный момент равна T_0. Внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$. Трением пренебречь.

2.42. В гладком вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем площади S находится воздух при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0. Внутри сосуд разделен на два одинаковых объема неподвижной горизонтальной перегородкой с маленьким отверстием. На поршень кладут груз массы m, под действием которого поршень очень медленно опускается до перегородки. Найти температуру воздуха внутри сосуда, если его стенки и поршень не проводят тепло. Внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$.

2.43*. В двух одинаковых колбах, соединенных трубкой, перекрытой краном, находится воздух при одинаковой температуре $T_1=T_2$ и разных давлениях. После того как кран открыли, часть воздуха перешла из одной колбы в другую. Через некоторое время давления в колбах сравнялись, движение газа прекратилось и температура в одной из колб стала равной T_1'. Какой будет температура в другой колбе в этот момент? Внутренняя энергия одного моля воздуха $U=cT$. Объемом соединительной трубки пренебречь. Теплообмен со стенками не учитывать.

2.44*. В вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь сечения которого равна S, под поршнем массы m находится газ, разделенный перегородкой на два одинаковых объема. Давление газа в нижней части сосуда равно p, внешнее давление равно p_0, температура газа в

обеих частях сосуда равна T. На сколько сместится поршень, если убрать перегородку? Внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$. Высота каждой части сосуда равна h. Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Трением пренебречь.

2.45. Поршень удерживается в центре неподвижного теплоизолированного закрытого цилиндрического сосуда длины $2l$, площади сечения S. Правую половину сосуда занимает газ, температура и давление которого равны T_1 и p_1, в левой половине — вакуум. Поршень соединен с левым торцом сосуда пружиной жесткости $\varkappa$ (рис. 2.45). Найти установившуюся температуру газа T_2 после того, как поршень отпустили. Длина недеформированной пружины равна $2l$, внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$. Трением пренебречь.

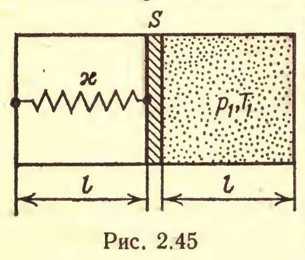


Рис. 2.45

2.46*. В теплоизолированном длинном цилиндрическом сосуде, стоящем вертикально, на высоте h от дна висит на нити поршень массы m. Под поршнем находится один моль газа, давление которого в начальный момент равно внешнему давлению p_0, а температура равна T_0. Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$? Внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$. Трением пренебречь.

2.47. В теплоизолированном закрытом поршнем цилиндрическом сосуде, расположенном горизонтально, содержится один моль газа при давлении в два раза меньшем внешнего и температуре T. Поршень может свободно передвигаться, увеличивая вместимость сосуда, и удерживается стопором от движения в противоположную сторону (рис. 2.47). Какое количество теплоты следует подвести

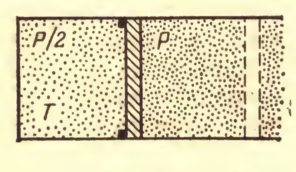


Рис. 2.47

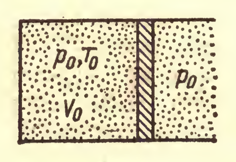


Рис. 2.49

к газу, чтобы его объем увеличился в два раза? Внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$.

2.48*. В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массы M, находится один моль газа. Газ нагревают. Поршень, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость v. Найти количество теплоты, сообщенной газу. Внутренняя энергия моля газа $U=cT$. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением пренебречь.

2.49*. В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, площадь сечения которого равна S, находится один моль газа при температуре T_0 и давлении p_0. Внешнее давление постоянно и равно p_0 (рис. 2.49). Газ нагревают. Поршень начинает двигаться, причем сила трения скольжения равна f. Найти зависимость температуры газа от получаемого им количества теплоты, если в газ поступает половина количества теплоты, выделяющегося при трении поршня о стенки сосуда. Построить график этой зависимости. Внутренняя энергия одного моля газа $U=cT$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.

Глава III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 1. Напряженность, потенциал и энергия электростатического поля

3.1°. Незаряженный металлический цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти напряженность E электрического поля в цилиндре на расстоянии r от его оси. Заряд электрона равен e, а масса равна m.

3.2°. Найти силу натяжения нити, соединяющей два одинаковых шарика радиуса r и массы m, имеющих одинаковые заряды q. Один из шариков плавает на поверхности жидкости плотности ρ, а второй находится в равновесии внутри жидкости. Расстояние между центрами шариков равно l, диэлектрическая проницаемость жидкости и воздуха равна 1.

3.3°. В вершинах ромба, сторонами которого служат нерастяжимые нити, находятся в равновесии заряды, равные q_1, q_2, q_1, q_2. Найти угол при вершине с зарядом q_1.

3.4°. По кольцу радиуса R, расположенному вертикально в поле тяжести Земли, могут скользить одинаковые шарики массы m.

1. Какие заряды следует сообщить двум подвижным шарикам, чтобы они расположились на концах горизонтальной хорды, стягивающей дугу 120°? Рассмотреть два случая: хорда проходит выше или ниже центра кольца.

2. Какой заряд нужно сообщить неподвижно закрепленному шарику, чтобы он и два подвижных шарика, имеющие одинаковый заряд q, расположились в вершинах правильного треугольника? Рассмотреть два случая: закрепленный шарик находится на верхнем или нижнем конце вертикального диаметра.

3. Два шарика закреплены на концах вертикального диаметра и имеют заряды q_1 и q_2. Какие заряды нужно сообщить двум подвижным шарикам, чтобы все четыре шарика расположились в вершинах квадрата?

4. Два подвижных шарика имеют одинаковый заряд. Какой заряд нужно сообщить двум закрепленным шарикам, расположенным на концах горизонтальной хорды, стягивающей дугу 90°, чтобы все четыре шарика расположились в вершинах квадрата? Рассмотреть два случая: хорда проходит выше или ниже центра кольца.

3.5°. К гладкой бесконечной плоскости, расположенной вертикально в поле тяжести Земли и имеющей поверхностную плотность заряда σ, прикреплен на нити одноименно заряженный шарик массы m и с зарядом q. Найти силу натяжения нити и угол α отклонения нити от вертикали. Напряженность поля заряженной плоскости $E=\sigma/(2\varepsilon_0)$.

3.6. Две бесконечные параллельные проводящие плиты заряжены так, что суммарная поверхностная плотность заряда обеих поверхностей первой плиты равна σ_1, а второй — σ_2. Найти плотность заряда каждой поверхности обеих плит.

3.7*. Кольцо из проволок разрывается, если его зарядить зарядом q. Диаметр кольца и диаметр проволоки увеличили в три раза. Какой заряд следует сообщить новому кольцу, чтобы оно разорвалось?

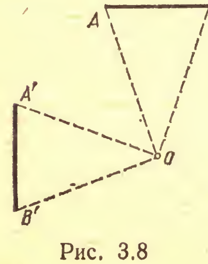


Рис. 3.8

3.8°. Равномерно заряженный стержень AB создает в точке O электрическое поле напряженности $\boldsymbol{E}_0$, потенциал которого равен φ_0 (рис. 3.8). Какими станут напряженность поля и потенциал в точке O, если в плоскости AOB поместить еще один такой же и так же заряжен-

ный стержень $A'B'$, причем $AO=BO=A'O=B'O$ и $A'B' \perp AB$?

3.9. Три одинаковых проводящих шара расположены в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого велики по сравнению с радиусами шаров, $l \gg r$ (рис. 3.9). Вначале заряд имеется лишь на шаре *1*. Затем шары *1* и *2* соединяют проводником, после чего проводник убирают. Потом такую же процедуру совершают с шарами *2* и *3*, а затем с шарами *3* и *1*. Какой заряд после этого окажется на каждом из шаров?

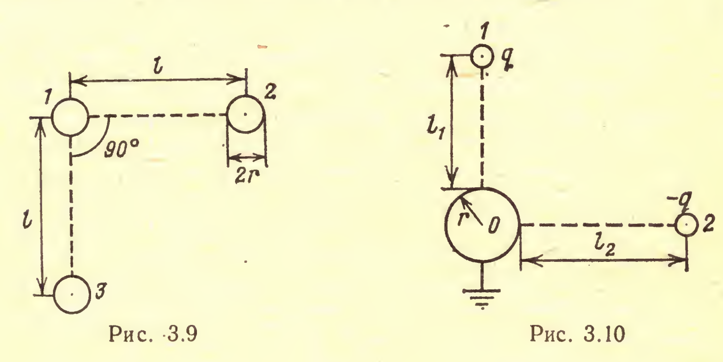


Рис. 3.9

Рис. 3.10

3.10. Разноименные заряды q и $-q$ находятся на расстояниях l_1 и l_2 от заземленной сферы малого радиуса r (рис. 3.10). Расстояние от зарядов до поверхности земли и других заземленных предметов много больше l_1 и l_2. Найти силу, с которой заряды действуют на сферу. Угол с вершиной в центре сферы, образованный прямыми, проведенными через заряды, равен 90°.

3.11. Два металлических шара, заряд каждого из которых равен q, расположены на расстоянии l друг от друга. Первый шар заземляют и затем удаляют заземляющий проводник. Затем такую же процедуру совершают со вторым шаром. После этого снова заземляют первый шар и т. д. Каково отношение зарядов на шарах после $2n$ (n — целое) заземлений и изоляций? Оба шара находятся на очень большом расстоянии от земли. Радиусы шаров r много меньше l.

3.12*. Внутри сферы радиуса R, заряд которой равен q, находится заземленная проводящая сфера радиуса r. Центры сфер совпадают. Найти напряженность электрического поля вне большой сферы на расстоянии l от ее центра.

3.13°. Вокруг неподвижного протона, заряд которого равен e, движутся по окружности радиуса r, образуя квадрат, четыре электрона, заряд которых равен $-e$, а масса равна m. Определить скорость электронов.

3.14. Электрон и позитрон движутся по окружности вокруг своего неподвижного центра масс, образуя атом позитрония. Найти отношение потенциальной и кинетической энергий частиц. Электрон и позитрон отличаются только знаками заряда.

3.15. Две частицы массы m_1 и m_2, разноименно заряженные, движутся под влиянием взаимного электрического притяжения по окружности вокруг неподвижного центра масс. Скорость частицы массы m_1 мгновенно увеличивают в n раз, не изменяя ее направления. При каком минимальном n частицы разлетятся бесконечно далеко друг от друга? Заряды частиц равны по модулю.

3.16. Какую работу надо совершить, чтобы ионизовать атом водорода, то есть удалить электрон, заряд которого $e=-1,6\cdot10^{-19}$ Кл, от протона на очень большое расстояние? Диаметр атома водорода d принят равным 10^{-8} см. Выразить работу по ионизации атома в электронвольтах (1 эВ$=1,6\cdot10^{-19}$ Дж$=1,6\cdot10^{-12}$ эрг; электрическая постоянная $\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м).

3.17. Скорости двух электронов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ лежат в одной плоскости и при расстоянии l между электронами образуют углы α с прямой, соединяющей электроны (рис. 3.17). На какое минимальное расстояние сблизятся электроны, если скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ равны по модулю v? Заряд электрона равен e, а масса равна m.

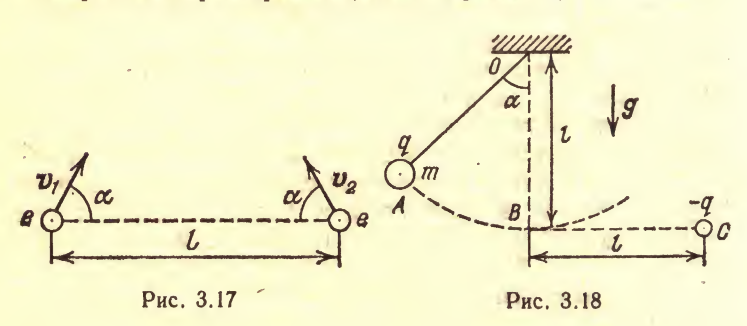


Рис. 3.17

Рис. 3.18

3.18. Маятник OA представляет собой невесомую тонкую изолирующую спицу длины l, на конце которой находится шарик массы m, имеющий заряд q (рис. 3.18).

Второй шарик, заряд которого равен $-q$, закреплен в точке C, причем $OB=l$ — вертикаль, $BC=l$ — горизонталь. Найти силу, действующую на ось маятника в момент прохождения им точки B. В начальный момент времени маятник имел скорость, равную нулю, и был отклонен от вертикали на угол $\alpha=45°$. Ускорение свободного падения равно g.

3.19. Два одинаковых шарика массы m, имеющие одинаковый заряд q, начинают скользить по двум одинаковым неподвижным и непроводящим спицам. Спицы расположены в вертикальной плоскости, причем каждая спица наклонена к горизонту под углом α (рис. 3.19). На какую максимальную высоту над первоначальным уровнем поднимутся шарики? В начальный момент шарики покоились и находились на расстоянии L друг от друга и на расстоянии l от концов спиц. Трением пренебречь.

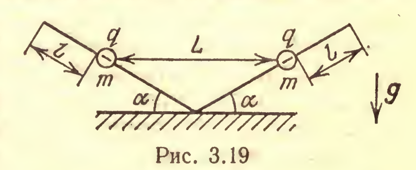


Рис. 3.19

3.20. Три маленьких одинаковых шарика массы m, имеющие одинаковый заряд q, могут скользить по очень длинному стержню. Какую скорость будут иметь шарики на очень большом расстоянии друг от друга, если в начальный момент они покоились и расстояние между ними было равно l?

3.21. Два одинаковых шарика, имеющие одинаковый заряд q, соединены пружиной. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от l до $4l$. Найти жесткость пружины, если ее длина в свободном состоянии равна $2l$.

3.22. Два небольших тела, связанные нитью длины l, лежат на горизонтальной плоскости. Заряд каждого тела равен q, масса равна m. Нить пережигают, и тела начинают скользить по плоскости. Какую максимальную скорость разовьют тела, если коэффициент трения равен k?

3.23. На горизонтальной шероховатой поверхности закреплен заряд q_1. Тело массы m, имеющее заряд q_2, может перемещаться по поверхности. На каком расстоянии от заряда q_1 тело остановится, если в начальный момент оно покоилось и находилось на расстоянии l_0 от заряда q_1? Заряды q_1 и q_2 — одного знака. Коэффициент трения равен k.

3.24*. Три одинаковых одноименно заряженных тела, заряд каждого из которых равен q, а масса — m, соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длины l так, что нити образуют равносторонний треугольник. Одну из нитей пережигают. Найти максимальные скорости тел.

3.25. Расстояние между закрепленными разноименными зарядами q_1 и q_2 равно l. Частица массы m, имеющая заряд q_3 одного знака с q_2 летит по прямой, соединяющей закрепленные заряды. Какую наименьшую скорость должна иметь частица на большом расстоянии от зарядов q_1 и q_2, чтобы достичь заряда q_1?

3.26. Шарик массы m, имеющий заряд q, находится внизу под закрепленным зарядом $-q$ на расстоянии l от него. Какую минимальную скорость, направленную вниз, надо сообщить шарику, чтобы он упал на землю? Расстояние до земли велико, движение происходит в поле тяготения Земли.

3.27. Сфера радиуса r расположена внутри сферы радиуса R. Центры сфер совпадают. Внутренняя сфера равномерно заряжена. Ее заряд равен q_1. Между сферами строго вдоль радиусов движется много одинаковых шариков, имеющих каждый заряд q_2. Шарики попеременно ударяются о поверхности сфер. В момент удара о внутреннюю сферу каждый шарик имеет кинетическую энергию $W_к$. Найти среднее давление на внешнюю сферу, если среднее давление на внутреннюю сферу, оказываемое шариками при ударах о нее, равно p. Удары упругие. Заряды q_1 и q_2 одного знака. Взаимодействием шариков друг с другом пренебречь.

3.28°. Четыре непроводящих шарика радиуса $r = 10^{-3}$ м, в центре каждого из которых находится заряд $q = 10^{-7}$ Кл, расположены вдоль прямой, касаясь друг друга. Какую работу нужно совершить, чтобы сложить из этих шариков пирамидку (правильный тетраэдр)? Влиянием силы тяжести пренебречь.

3.29°. В закрепленной металлической сфере радиуса $r = 10^{-2}$ м, имеющей заряд $q_1 = -10^{-8}$ Кл, проделано очень маленькое отверстие. Точечный заряд $q_2 = 10^{-9}$ Кл массы $m = 10^{-6}$ кг летит по прямой, проходящей через центр сферы и отверстие, имея на очень большом расстоянии от сферы скорость $v_0 = 1$ м/с. Какова скорость v точечного заряда в центре сферы?

3.30. Частица массы m_1, имеющая заряд q_1, движется со скоростью v_0 по оси заряженного кольца, прибли-

жаясь к нему. Какую наименьшую скорость должна иметь частица на очень большом расстоянии от кольца, чтобы пролететь сквозь кольцо? Масса кольца равна m_2, его радиус равен r, а заряд равен q_2. Кольцо не закреплено.

3.31*. В тонкостенной непроводящей равномерно заряженной сфере массы m_1 и радиуса r имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. Заряд сферы равен q_1. В начальный момент сфера покоится. По прямой, соединяющей отверстия, из бесконечности движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ частица массы m_2 с зарядом q_2, одноименным с q_1. Найти время, в течение которого заряд q_2 будет находиться внутри сферы.

3.32. Через n последовательно расположенных вдоль одной оси металлических цилиндрических трубок ускорителя, радиусы которых много меньше длины, проходит пучок заряженных частиц, испускаемых некоторым источником. Трубки поочередно подключены к разным полюсам генератора постоянной частоты и амплитуды напряжения. Длина первой трубки равна l. Длины следующих пролетных трубок выбираются так, чтобы за время пролета заряженной частицы от одного ускоряющего промежутка (пространство между концами пролетных трубок) до другого электрическое поле меняло свой знак и становилось снова ускоряющим. Найти длины пролетных трубок, пренебрегая всюду расстояниями между их концами. В первый ускоряющий промежуток (между источником и первой трубкой) частица попадает с нулевой скоростью. Считать, что скорость частиц далека от скорости света.

3.33*. Центры двух неметаллических закрепленных сфер радиуса r расположены на расстоянии $4r$ друг от друга. По поверхности каждой из них равномерно распределен заряд q_1. В правой сфере на оси, соединяющей центры сфер, имеются два маленьких отверстия. Какова должна быть минимальная скорость $\boldsymbol{v}$ расположенной посередине между сферами частицы массы m, имеющей заряд q_2, чтобы она смогла пролететь через отверстия правой сферы. Заряды q_1 и q_2 одного знака.

3.34*. Центры двух неметаллических неподвижных сфер радиуса r, по поверхности которых равномерно распределен одинаковый положительный заряд, расположены на расстоянии $2{,}4r$ друг от друга. По линии центров в сферах сделаны небольшие отверстия. Вдоль этой линии движется отрицательно заряженная частица, имеющая в средней точке между сферами близкую к нулю скорость.

На какое максимальное расстояние она удалится от этой точки?

3.35*. Центры двух непроводящих шаров скреплены жесткой невесомой спицей, вдоль которой может скользить третий шар. Все шары одинаковы и имеют массу m. На каждом шаре равномерно по поверхности распределен заряд q. Найти максимальную скорость среднего шара, если в начальный момент его центр был удален от центра левого шара на расстояние l, а от центра правого — на расстояние $2l$. В начальный момент все шары покоятся. Вся система не закреплена. Трением пренебречь.

3.36*. Центры двух шаров массы m и радиуса r разнесены на расстояние $10r$ (рис. 3.36). На одном из них равномерно распределен заряд q, на втором $-q$. Правый шар привязан к удаленной стене нитью, которая выдерживает на разрыв силу натяжения T. Левый шар отпускают. Найти скорость шаров после соударения, если удар был абсолютно неупругим. Заряды не перераспределяются.

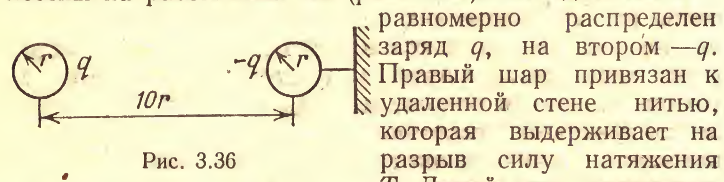


Рис. 3.36

§ 2. Электрическая емкость. Конденсаторы

3.37. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряженности $E=10^3$ В/м, перпендикулярном пластинам. Площадь пластин конденсатора $S=10^{-2}$ м². Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? Пластины конденсатора до замыкания не заряжены. Влиянием силы тяжести пренебречь.

3.38. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряженности E, перпендикулярном пластинам. По пластинам, площадь которых равна S, равномерно распределены заряды q и $-q$. Какую работу нужно совершить, чтобы перевернуть конденсатор, поменяв пластины местами? Расстояние между пластинами равно d. Влиянием силы тяжести пренебречь.

3.39. Большая тонкая проводящая пластина, площадь которой равна S, а толщина равна d, помещена в однородное электрическое поле напряженности E, перпендикулярное пластине. Какое количество теплоты выделится в проводнике, если поле мгновенно выключить?

3.40°. Два одинаковых плоских конденсатора емкости C соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов U. Пластины одного из конденсаторов разводят на большое расстояние. Найти разность потенциалов на втором конденсаторе и его энергию.

3.41. Электрон влетает в плоский заряженный конденсатор, двигаясь в начальный момент по его средней линии со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ (рис. 3.41). Через какое время нужно изменить направление электрического поля в конденсаторе на противоположное, чтобы на вылете из конденсатора электрон пересек плоскость AB? Длина конденсатора равна l.

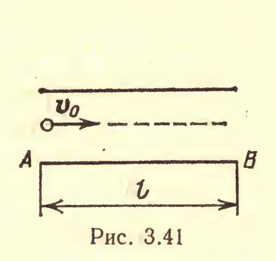


Рис. 3.41

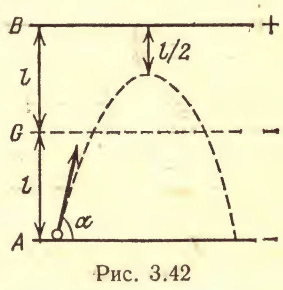


Рис. 3.42

3.42. В центре плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого равно $2l$, находится заряженная сетка (рис. 3.42). Разность потенциалов между сеткой и положительно заряженной пластиной B вдвое больше разности потенциалов между сеткой и отрицательно заряженной пластиной A. Из пластины A под углом α к ее плоскости вылетает положительно заряженная частица и достигает точки, расположенной на расстоянии $l/2$ от пластины B. Найти расстояние от точки вылета частицы до точки ее возврата на пластину A. Влиянием силы тяжести пренебречь.

3.43. В четырехэлектродной лампе с плоскими электродами, площади которых одинаковы и равны S, расстоя-

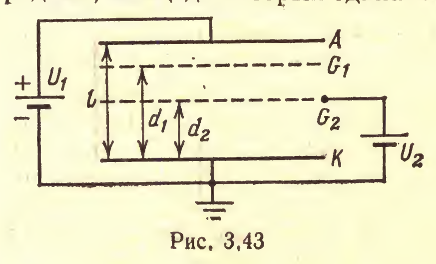


Рис. 3.43

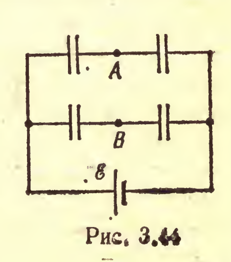


Рис. 3.44

ния между катодом K и анодом A, сетками G_1 и G_2 равны l, d_1 и d_2 (рис. 3.43). Напряжения U_1 и U_2 известны. Найти заряд на сетке G_1, если известно, что ток через лампу не идет.

3.44°. Три любых конденсатора в схеме, изображенной на рис. 3.44, имеют одинаковую емкость, а четвертый — в два раза большую. Найти разность потенциалов между точками A и B, если э. д. с. батареи $\mathcal{E}=6$ В.

3.45. Конденсаторы емкости $C_1=5$ мкФ и $C_2=10$ мкФ включены в схему, как показано на рис. 3.45. К точкам A и B приложена разность потенциалов $U_{AB}=16$ В. Найти разность потенциалов U_{DF}.

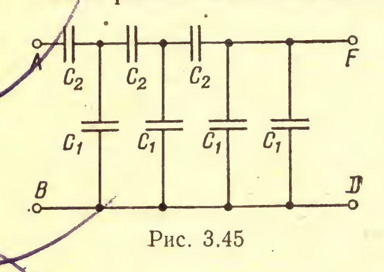
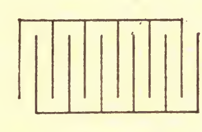


Рис. 3.45


Рис. 3.46

3.46°. Конденсатор сделан из двух наборов пластин, как показано на рис. 3.46. Найти емкость конденсатора, пренебрегая краевыми эффектами. Площадь каждой пластины равна S. Расстояние между пластинами одинаково и равно d (d много меньше поперечных размеров пластин). Полное число пластин равно $2n$.

3.47°. Одну пластину незаряженного конденсатора емкости C заземляют, а другую присоединяют длинным тонким проводом к удаленному от окружающих предметов проводящему шару радиуса r, имеющему заряд q_0. Какой заряд останется на шаре?

3.48. Конденсаторы емкости C_1, C_2, C_3 включены в схему с резистором, как показано на рис. 3.48. Найти

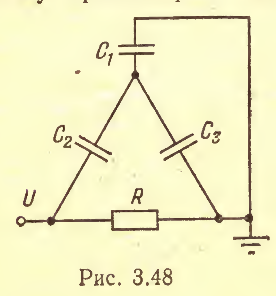


Рис. 3.48

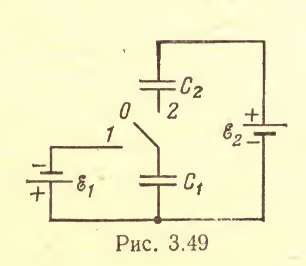


Рис. 3.49

установившиеся заряды конденсаторов. Напряжение U и сопротивление резистора R известны.

3.49. Конденсаторы емкости C_1 и C_2 включены в схему, как показано на рис. 3.49. В начальный момент ключ находится в среднем положении (*0*), а конденсаторы не заряжены. Ключ переводят в положение *1* и через некоторое время — в положение *2*. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе емкости C_1?

3.50. К конденсатору *1* емкости C, заряженному до разности потенциалов U, подсоединяется батарея из конденсаторов такой же емкости, как показано на рис. 3.50. Найти заряд на каждом из шести конденсаторов.

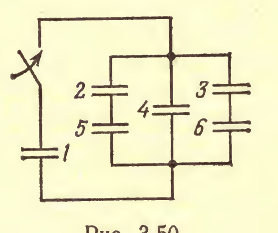


Рис. 3.50

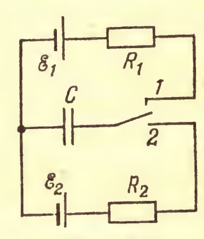


Рис. 3.51

3.51*. Ключ в цепи, изображенной на рис. 3.51, переводят поочередно в положения *1* и *2* на очень малые одинаковые промежутки времени (рис. 3.51). Какой заряд окажется на конденсаторе после большого числа переключений, если изменение заряда конденсатора за время одного переключения незначительно? Величины R_1, R_2, $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ и C известны.

3.52. В участок цепи, изображенный на рис. 3.52 слева, подаются повторяющиеся с периодом T прямоугольные импульсы, длительность которых равна τ

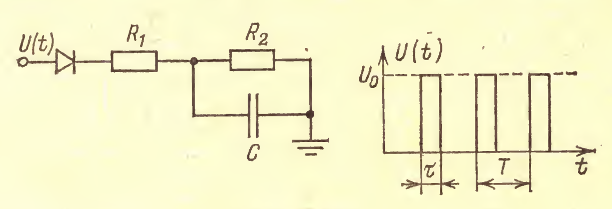


Рис. 3.52

(рис. 3.52 справа). Найти установившееся через большое время напряжение на конденсаторе, если в течение одного

периода напряжение на конденсаторе изменяется незначительно. Величины U, R_1 и R_2 известны.

3.53*. Трем одинаковым изолированным конденсаторам, емкости C каждый, были сообщены заряды q_1, q_2 и q_3 (рис. 3.53). Конденсаторы соединили. Найти заряд на конденсаторах.

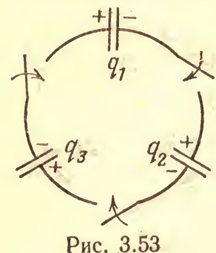


Рис. 3.53

3.54*. Конденсаторы *1*, *2* и *3* соединяют, как показано на рис. 3.54. Конденсатор *1* при этом не заряжен, конденсаторы *2* и *3* заряжены, причем в случае соединения всех трех конденсаторов конденсаторы *2* и *3* подключены друг к другу разноименными обкладками. Найти заряд, появляющийся на конденсаторе *1* при соединении его с конденсаторами *2* и *3*, если при соединении с конденсатором *2* на нем возникает заряд q_{12}, а при соединении с конденсатором *3* — заряд q_{13}. Емкости конденсаторов равны

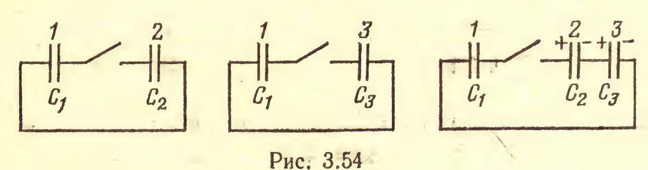


Рис. 3.54

соответственно C_1, C_2, C_3. Конденсаторы *2* и *3* имеют в случае соединения трех конденсаторов те же первоначальные заряды, что и в случаях раздельного их соединения конденсатором *1*.

3.55°. Два электропроводящих поршня площади S образуют в непроводящей трубке плоский конденсатор, заполненный воздухом при атмосферном давлении p_0. Во сколько раз изменится расстояние между поршнями, если их зарядить разноименными зарядами q и $-q$? Температура воздуха постоянна. Трением пренебречь.

§ 3. Цепи постоянного и переменного тока

3.56°. Сетка состоит из одинаковых звеньев (рис. 3.56). Сопротивление каждого звена $R = 1$ Ом. Найти сопротивление между точками A и B.

3.57°. Найти сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 3.57, при разомкнутом и

замкнутом ключе. Сопротивление каждой стороны и диагонали квадрата $R=1$ Ом.

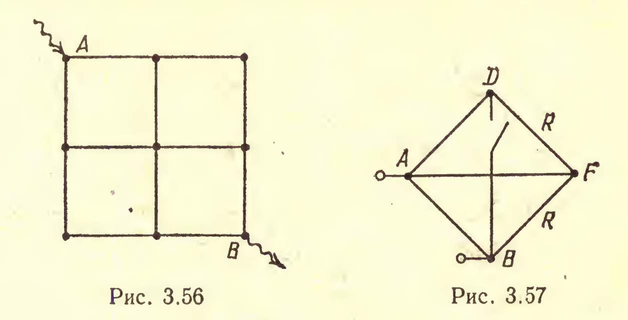


Рис. 3.56

Рис. 3.57

3.58. Найти сопротивление между соседними вершинами проволочного куба. Сопротивление каждого из ребер куба $R=1$ Ом.

3.59. Найти сопротивление между вершинами куба, расположенными на диагонали одной из его граней. Сопротивление каждого из ребер куба $R=1$ Ом.

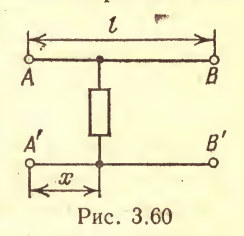


Рис. 3.60

3.60. В двухпроводной линии длины l на некотором расстоянии x от ее начала $A'A$ пробило изоляцию, что привело к появлению некоторого конечного сопротивления между проводами в этом месте (рис. 3.60). Для поиска места пробоя провели три измерения: сопротивление между точками A и A' равно R_1 при разомкнутых концах B и B' и равно R_2 при коротко замкнутых концах B и B', и сопротивление между точками B и B' при разомкнутых концах A и A' равно R_3. Найти расстояние x.

3.61°. В ускорителе пучок частиц движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v. Средний ток, создаваемый пучком, равен I. Найти заряд пучка.

3.62*. На однородный стержень, оба конца которого заземлены, падает пучок электронов, причем в единицу времени на единицу длины стержня попадает постоянное число электронов (рис. 3.62). Найти разность потенциалов между серединой стержня (точка A) и его концом (точка B). Сопротивление стержня равно R. Ток на участке заземления DF равен I.

3.63°. Найти напряжение U между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 3.63. Сопротивление резисторов R и ток I известны.

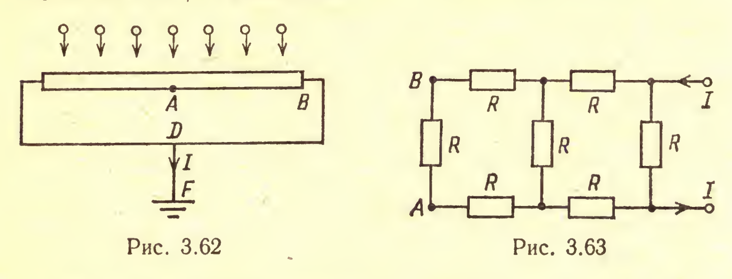


Рис. 3.62 Рис. 3.63

3.64°. Найти напряжение U между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 3.64, если на вход схемы подано напряжение 160 В.

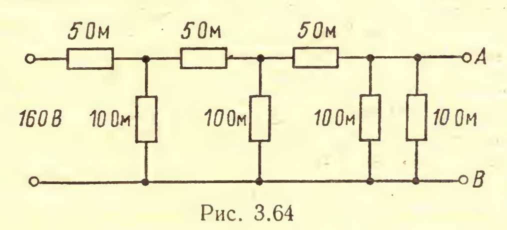


Рис. 3.64

3.65. Резисторы и вольтметр включены в цепь переменного тока, как показано на рис. 3.65. Напряжение между точками A и A' втрое меньше напряжения между точ-

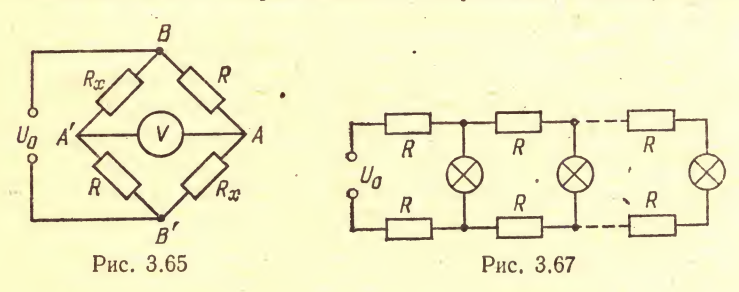


Рис. 3.65 Рис. 3.67

ками B и B'. Найти сопротивление R_x, если сопротивление R известно.

3.66. Резистор, сопротивление которого равно R_1, и элемент, переменное сопротивление которого $R_2=R_{02}-$ $-cU$, где U — падение напряжения на элементе, а c —

некоторая константа, включены в электрическую цепь. Найти ток в цепи, если на вход ее подведено напряжение U_0, а падение напряжения U на элементе неизвестно.

3.67. Линия из N ламп, соединенных между собой одинаковыми отрезками проводов, имеющими сопротивление R (рис. 3.67), подсоединена к источнику тока, напряжение которого равно U_0. Считая, что в результате нагрева нити ток I_0, потребляемый лампой, не зависит от напряжения на ней, найти сопротивление провода R, при котором напряжение на последней лампе будет составлять $0{,}9U_0$.

3.68. Найти напряжение, которое покажет вольтметр, включенный в схему так, как показано на рис. 3.68. Э.д.с. источников тока и их внутренние сопротивления равны $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, r_1 и r_2. Сопротивление нагрузки равно R.

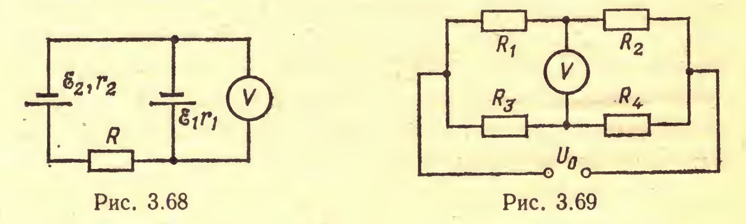


Рис. 3.68 Рис. 3.69

3.69. Найти напряжение, которое покажет высокоомный вольтметр, включенный в схему так, как показано на рис. 3.69. Сопротивления резисторов R_1, R_2, R_3 и R_4 и напряжение U_0 известны.

3.70. Металлическая звезда, все ребра которой обладают сопротивлением R, включена в электрическую цепь, как показано на рис. 3.70. Найти отношение количеств теплоты, выделившейся на ребрах BD, BC, CD, AB, BE, за одно и то же время. Как изменятся эти отношения, если сопротивление ребра BD сделать равным нулю, а сопротивление ребра CD равным $2R$?

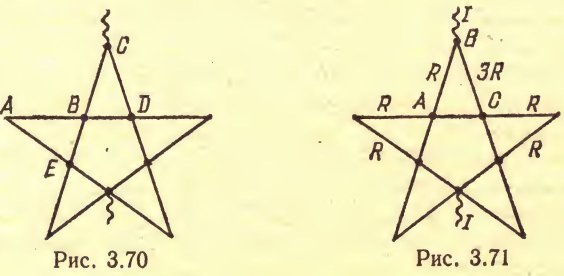


Рис. 3.70 Рис. 3.71

3.71. Металлическая звезда включена в сеть, как показано на рис. 3.71. Сопротивление ребра AC равно нулю, сопротивление ребра BC равно $3R$, сопротивления остальных ребер равны R. Найти ток через ребро AC и мощность, выделяющуюся во всей звезде.

3.72. Плоский конденсатор, заполненный веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ, подключен к источнику тока, имеющему э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r. Найти заряд, накопившийся на конденсаторе, если сопротивление утечки конденсатора равно R. Сопротивлением проводов пренебречь.

3.73. В плоский конденсатор с квадратными пластинами вдвигается с постоянной скоростью v металлическая пластина. Конденсатор включен последовательно с резистором, имеющим сопротивление R, и с источником тока, э. д. с. которого равна $\mathscr{E}$ (рис. 3.73). Найти установившуюся мощность, выделяющуюся на резисторе. Расстояние между пластинами конденсатора равно d_0. Площадь вдвигаемой пластины равна площади пластин конденсатора $l \times l$, а ее толщина равна d.

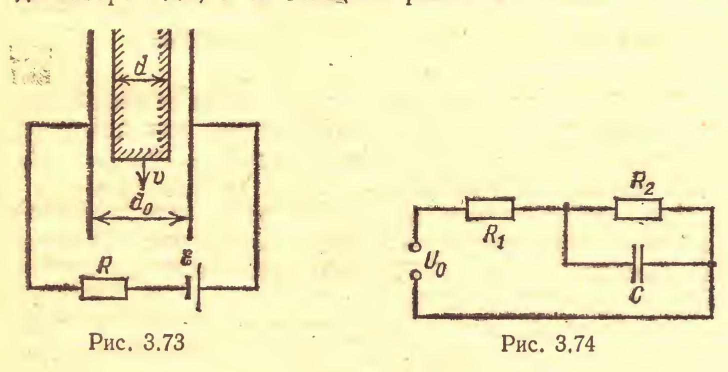


Рис. 3.73 Рис. 3.74

3.74. Конденсатор емкости C и резисторы, сопротивления которых равны R_1 и R_2, включены в электрическую цепь, как показано на рис. 37.4. Найти заряд на конденсаторе, если по цепи течет постоянный ток. Напряжение U_0 известно.

3.75. Конденсаторы емкости C_1 и C_2 и резисторы, сопротивления которых равны R_1, R_2, R_3, включены в электрическую цепь, как показано на рис. 3.75. Найти установившиеся заряды на конденсаторах. Напряжение U_0 известно.

3.76. Конденсаторы емкости C_1, C_2, C_3 и резисторы, сопротивления которых равны R_1 и R_2, включены в электрическую цепь, как показано на рис. 3.76. Найти

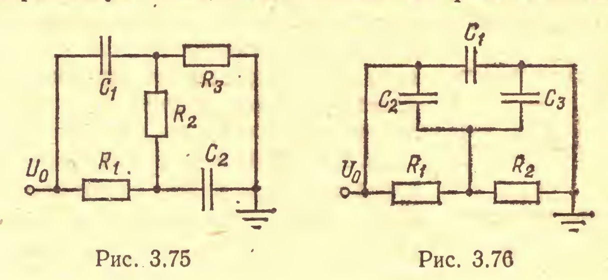


Рис. 3.75 Рис. 3.76

установившиеся заряды на конденсаторах. Напряжение U_0 известно.

3.77. Конденсатор емкости C и резисторы, сопротивления которых равны R, включены в электрическую цепь, как показано на рис. 3.77. Найти установившийся заряд на конденсаторе. Напряжение U_0 известно.

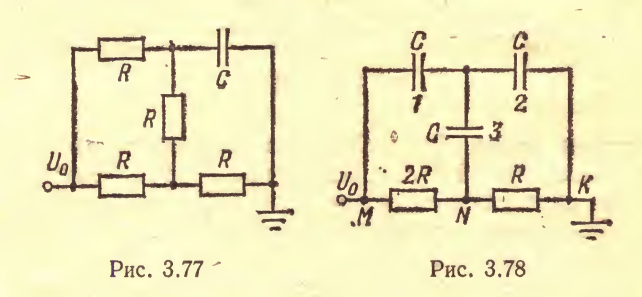


Рис. 3.77 Рис. 3.78

3.78. Конденсаторы, емкости которых равны C, и резисторы, имеющие сопротивления R, включены в цепь, как показано на рис. 3.78. Найти заряд на заземленной обкладке конденсатора. Напряжение U_0 известно.

3.79. 1. Заряженный конденсатор емкости C замыкают на резистор, имеющий переменное сопротивление. Найти зависимость сопротивления резистора от времени, если ток через него остается постоянным до полной разрядки конденсатора. Начальное сопротивление резистора равно R_0.

2. Заряженный конденсатор переменной емкости замыкают на резистор, имеющий сопротивление R. Найти зависимость емкости от времени, если ток в цепи остается

постоянным до полной разрядки конденсатора. Начальная емкость равна C_0.

3.80°. Резисторы *1*, *2*, *3* включены в электрическую цепь с диодом, как показано на рис. 3.80. Определить мощность, выделяющуюся на резисторе *3*. Напряжение источника переменного тока равно U, сопротивление всех резисторов равно R.

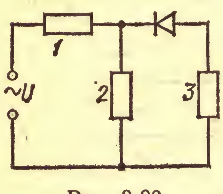


Рис. 3.80

3.81*. Найти максимальное падение напряжения на резисторе, имеющем сопротивление R, и долю периода, в течение которой ток в цепи отличен от нуля (рис. 3.81). Построить график зависимости от времени падения напряжения на сопротивлении R. Амплитудное значение напряжения источника переменного тока равно 220 В,

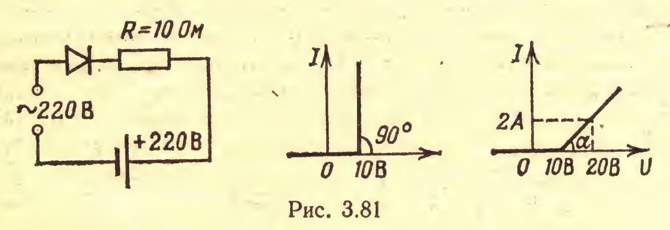


Рис. 3.81

а частота равна 50 Гц. Внутренним сопротивлением батареи постоянной э. д. с. можно пренебречь. Решить задачу для двух случаев, когда зависимость тока через диод от приложенного к нему напряжения имеет вид, представленный на рис. 3.81.

3.82. Через нагревательную спираль, сопротивление которой постоянно, пропускают постоянный ток. На сколько процентов изменится среднее количество теплоты, выделяющейся в спирали в единицу времени, если через спираль пропускать одновременно с постоянным током переменный (синусоидальный) ток, амплитудное значение которого составляет 10% от силы постоянного тока?

3.83. Металлический шар, удаленный от окружающих предметов, заземлен через резистор, имеющий сопротивление R. На шар налетает пучок электронов, скорость которых вдали от шара равна v_0, так что на шар попадает n_t электронов в единицу времени. Какое количество теплоты выделяется в шаре в единицу времени? Масса и заряд электрона равны m и e.

3.84. Плоский конденсатор массы M подвесили к пружине так, что его пластины горизонтальны. При этом удлинение пружины равно Δl. Найти дополнительное удлинение пружины, если в конденсатор параллельно его пластинам будет входить пучок электронов, отклоняющихся на выходе из конденсатора от горизонтали на угол α. Сила тока пучка электронов равна I, масса, заряд и начальная скорость электронов равны m, e, $\boldsymbol{v}_0$.

3.85. Пучок электронов влетает со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Сколько электронов в единицу времени попадет на положительно заряженную пластину? Пучок имеет прямоугольное сечение, высота которого равна расстоянию между пластинами d, а ширина равна x. Число электронов в единице объема пучка равно n_V. Масса и заряд электронов равны m и e. На конденсатор подано напряжение U, длина пластин в направлении движения пучка равна l.

3.86*. Пучок электронов влетает со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ в плоский конденсатор, целиком заполняя при влете пространство между пластинами. Конденсатор последовательно с резистором, имеющим сопротивление R, подключен к источнику тока, э. д. с. которого равна $\mathscr{E}$. Найти ток через резистор. Расстояние между пластинами равно d, длина пластин в направлении движения пучка равна l, а их ширина равна x. Число электронов в единице объема равно n_V. Масса и заряд электронов равны m и e.

3.87. В вакуумном диоде, анод и катод которого — параллельные пластины, $I = cU^{3/2}$, где c — некоторая постоянная (рис. 3.87). Во сколько раз увеличится сила давления на анод, возникающая из-за ударов электронов о его поверхность, если напряжение на диоде увеличить в два раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих с катода, пренебречь.

Рис. 3.87

§ 4. Электромагнитная индукция. Взаимодействие тока с магнитным полем

3.88°. Четыре одинаковые проволоки длины l каждая, связанные на концах шарнирами, образуют квадрат. Квадрат помещен в однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное его плоскости. Противоположные вершины проволочного квадрата растягивают до тех пор,

пока он не превращается в прямой проводник. Какой заряд протечет при этом через гальванометр, соединенный последовательно с одной из проволок, если сопротивление каждой проволоки равно $R/4$?

3.89. Кольцевой виток с током находится в переменном магнитном поле, индукция которого $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0 \sin \omega t$ перпендикулярна плоскости витка. Виток превратили в восьмерку, составленную из двух равных колец, не выводя при этом провод витка из плоскости (рис. 3.89). Во сколько раз при этом изменилась амплитуда тока в витке? Индуктивностью витка пренебречь.

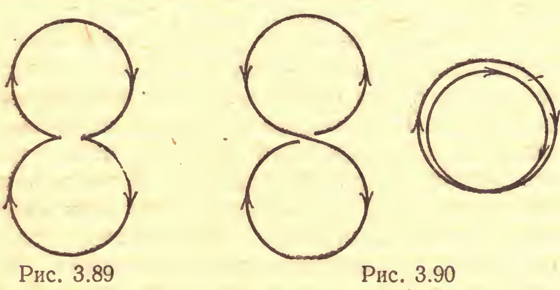


Рис. 3.89 Рис. 3.90

3.90*. Сверхпроводящее кольцо, по которому протекает ток, превращают в восьмерку с двумя одинаковыми окружностями (с поворотом одной из них на 180°) и затем складывают вдвое (рис. 3.90). Во сколько раз изменятся индукция магнитного поля в центре кольца и ток, протекающий по нему, если состояние сверхпроводимости не нарушается? Дать подробное объяснение.

3.91°. Проволочное кольцо диаметра d, имеющее сопротивление R, помещено в переменное однородное магнитное поле, перпендикулярное его плоскости. Магнитная индукция нарастает линейно за время t_1 от нуля до значения B и затем линейно уменьшается до нуля за время t_2. Какое количество теплоты выделится в кольце?

3.92*. В ускорителе по окружности радиуса r в магнитном поле, перпендикулярном плоскости траектории, движется тонкий пучок протонов. Найти силу тока пучка после того, как частицы сделали один оборот. Сила тока пучка в начальный момент равна I_0, полное число протонов в камере равно n. Поток индукции магнитного поля через орбиту протонного пучка изменяется с постоянной скоростью ($\Delta\Phi/\Delta t=\mathcal{E}$) так, что протоны ускоряются. Масса и заряд протонов равны m и e, их скорость остается далекой от скорости света.

3.93. Непроводящее кольцо массы m и радиуса r, имеющее равномерно распределенный небольшой заряд q, может свободно вращаться вокруг своей оси. Кольцо помещено в перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого в центральной области кольца радиуса $l<r$ равна $2B$, а в остальном пространстве внутри кольца равна B. Магнитное поле начинает равномерно уменьшаться до нуля. Какую скорость приобретает кольцо после исчезновения магнитного поля, если в начальный момент оно покоилось?

3.94*. Два параллельных идеально проводящих рельса расположены на расстоянии $l=0{,}1$ м друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю индукции $B=1$ Тл. Рельсы соединены неподвижным проводником, сопротивление которого $R_0=3$ Ом, и двумя проводниками, сопротивления которых $R_1=1$ Ом и $R_2=2$ Ом, движущимися в разные стороны от неподвижного проводника с постоянными скоростями $v_1=0{,}1$ м/с и $v_2=0{,}2$ м/с. Найти ток, проходящий через неподвижный проводник.

3.95*. Проводник EF движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, замыкая два проводника AC и AD, образующие между собой угол α (рис. 3.95). Перпендикулярно плоскости системы проводников приложено постоянное однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$. Найти полное количество теплоты, выделившееся в цепи за время движения проводника EF от точки A до точки C. Сопротивление единицы длины проводника EF равно R_l. Сопротивлением проводников AC и AD пренебречь. $AC=l_0$, $EF\perp AC$, $\boldsymbol{v}\perp EF$.

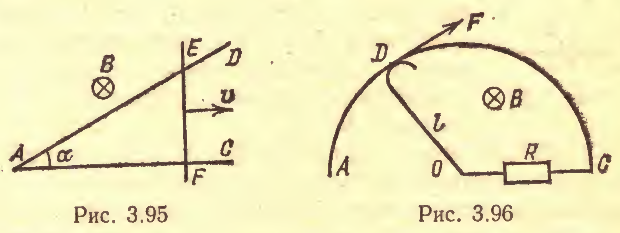


Рис. 3.95 Рис. 3.96

3.96. Проводник OD может скользить по дуге ADC радиуса l (рис. 3.96). Перпендикулярно плоскости дуги приложено постоянное однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$. Какую силу надо приложить в точке D перпендикулярно к проводнику OD, чтобы вращать его с постоянной угловой скоростью ω? Сопротивление участ-

ка OC равно R. Сопротивлением остальных проводников пренебречь.

3.97. Проволочная прямоугольная рамка со сторонами длины l_1 и l_2, массы которых равны m_1 и m_2, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси так, что одна из сторон длины l_1 остается неподвижной. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле индукции $\boldsymbol{B}$. Найти такую силу тока в рамке, при которой она будет неподвижна в поле тяготения Земли и наклонена к горизонту под углом α.

3.98. Горизонтальный проводник массы m и длины l может скользить по двум вертикальным проводящим стержням без нарушения электрического контакта. Стержни разнесены на расстояние l друг от друга и соединены внизу конденсатором емкости C. Перпендикулярно плоскости движения приложено постоянное однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$. Найти ускорение стержня. Сопротивлением образовавшейся электрической цепи, а также трением пренебречь. Система находится в поле тяготения Земли.

3.99*. Горизонтальный проводник массы m может скользить без нарушения электрического контакта по двум вертикальным проводящим стержням. Стержни разнесены на расстояние l друг от друга и соединены внизу источником тока, э. д. с. которого равна $\mathscr{E}$ (рис. 3.99). Перпендикулярно плоскости движения приложено постоянное однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$. Найти установившуюся скорость, с которой будет подниматься стержень. Сопротивление проводника равно R. Сопротивлением стержней и источника тока, а также трением пренебречь. Система находится в поле тяготения Земли.

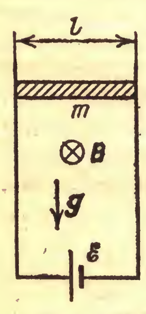


Рис. 3.99

3.100*. В ванну, наполненную ртутью, параллельно противоположным ее торцам опущены электроды, размеры которых совпадают с размерами торцевых плоскостей. Расстояние между электродами l много меньше размеров электродов и равно длине ванны. Перпендикулярно дну ванны приложено постоянное однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$. Под каким углом к горизонту расположится поверхность ртути, если к электродам приложить напряжение U? Удельное сопротивление ртути равно γ, а ее плотность равна ρ.

3.101*. МГД-насос представляет собой канал прямоугольного сечения высоты $h=0{,}1$ м, две противоположные стенки которого — проводящие (рис. 3.101). Расстояние между ними $l=0{,}05$ м. К проводящим стенкам подводится разность потенциалов $U=1$ В. Перпендикулярно двум непроводящим стенкам приложено однородное магнитное поле индукции $B=0{,}1$ Тл. Нижняя часть канала касается поверхности ртути, верхняя соединена с непроводящей вертикальной трубой. На какую высоту поднимется ртуть? Удельное сопротивление ртути $\gamma = 10^{-6}$ Ом·м, а ее плотность $\rho = 14 \cdot 10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

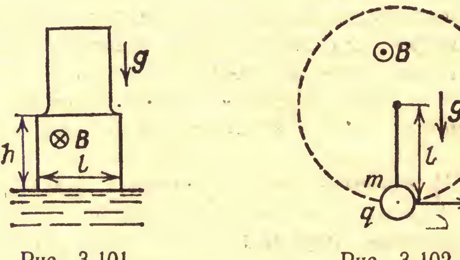


Рис. 3.101 Рис. 3.102

3.102. Небольшое заряженное тело массы m, прикрепленное к нити длины l, может двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Однородное магнитное поле индукции $\boldsymbol{B}$ перпендикулярно этой плоскости и направлено, как показано на рис. 3.102. При какой наименьшей скорости тела в нижней точке оно сможет совершить полный оборот? Заряд тела положителен и равен q.

3.103*. Одна обмотка понижающего трансформатора имеет N витков, другая — один виток. Трансформатор подключен к источнику переменного тока с э. д. с. $\mathscr{E}$. К выходному витку подсоединен гальванометр с внутренним сопротивлением r так, что подсоединения *1* и *2* делят виток на участки с сопротивлением R_1 и R_2, как показано на рис. 3.103. Какой ток покажет гальванометр? Рассеянием магнитного потока пренебречь.

3.104*. Заряженный конденсатор емкости C замкнут на катушку индуктивности L. Найти такую зависимость от времени емкости конденсатора, при которой ток в цепи нарастает прямо пропорционально времени.

3.105. Конденсатор емкости C и катушки индуктивности L_1 и L_2 включены в электрическую цепь, как показано на рис. 3.105. Найти наибольшую силу тока в цепи,

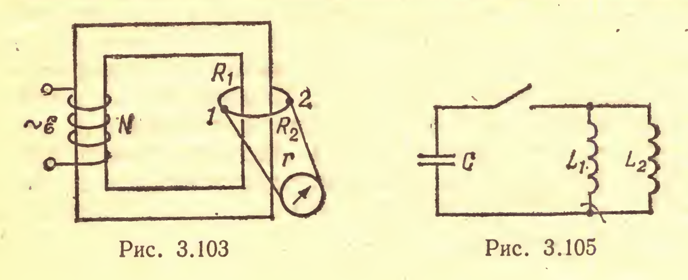


Рис. 3.103

Рис. 3.105

если начальная разность потенциалов на катушках индуктивности равна U_0. Энергия магнитного поля в катушке индуктивности L равна $\frac{LI^2}{2}$.

Глава IV. ОПТИКА

§ 1. Отражение. Зеркала

4.1. В комнате длины L и высоты H висит на стене плоское зеркало. Человек смотрит в него, находясь на расстоянии l от той стены, на которой оно висит. Какова должна быть наименьшая высота зеркала, чтобы человек мог видеть стену, находящуюся за его спиной, во всю высоту?

4.2. Два человека стоят на расстояниях l_1 и l_2 от вертикальной стены и на расстоянии l_0 друг от друга. Первый громко произносит короткое слово. За какое время он должен произнести это слово, чтобы второй человек услышал конец слова совпадающим с началом эха? Скорость звука в воздухе равна c.

4.3*. Автомобиль движется со скоростью v мимо длинной стены, удаляясь от нее под углом α. В момент, когда расстояние от автомобиля до стены равно l, шофер подает короткий звуковой сигнал. Какое расстояние пройдет автомобиль до момента, когда шофер услышит эхо? Скорость звука в воздухе равна c.

4.4°. Вогнутое сферическое металлическое зеркало, направленное на Солнце, собрало свет в точку, расположенную на оси зеркала на расстоянии l_1 от его центра.

Температура зеркала была при этом равна t_1. На каком расстоянии от центра зеркала будет находиться изображение после того, как зеркало нагреется до температуры t_2? Полюс зеркала закреплен. Температурный коэффициент линейного расширения металла равен α.

4.5. Полуцилиндрическое зеркало, поперечное сечение которого представляет собой полуокружность, поместили в широкий пучок света, параллельный оптической оси зеркала. Найти наибольший угол между лучами в отраженном от зеркала пучке света (угол расхождения).

4.6°. На главной оптической оси вогнутого зеркала радиуса кривизны r помещен точечный источник света S. Расстояние от него до зеркала $d=(3/4)r$. На каком расстоянии x от вогнутого зеркала надо поставить перпендикулярное главной оптической оси плоское зеркало, чтобы лучи от источника S, отраженные сначала одним, а потом другим зеркалом, снова сфокусировались в точке S?

4.7°. 1. В центре сферического зеркала радиуса r поместили точечный источник света S и, разрезав зеркало пополам по горизонтали, отодвинули верхнюю его половину на расстояние r вдоль главной оптической оси (рис. 4.7). Найти расстояние между изображениями источника света.

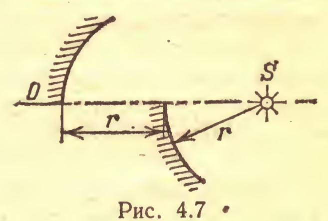


Рис. 4.7

2. В центре сферического зеркала расположен точечный источник света S. Зеркало разрезали пополам. Обе половины симметрично отодвинули на расстояние h от главной оптической оси целого зеркала. Найти расстояние между изображениями источника света в зеркалах.

4.8°. При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщины 1 мм число частиц уменьшилось на 15%, а их скорость не изменилась. Какая доля потока нейтронов пройдет через пластинку кадмия толщины 8 мм?

4.9. Пучок света интенсивности I_0 падает на плоскопараллельную пластину по нормали к ее поверхности. Найти интенсивность пучка, прошедшего сквозь пластину. Коэффициент отражения света на каждой поверхности пластины в любую сторону равен R. Поглощением света в пластинке пренебречь.

§ 2. Преломление

4.10°. Луч света падает под углом α на стопку плоских прозрачных пластин одинаковой толщины, показатель преломления каждой из которых в k раз меньше, чем у вышележащей. При каком наименьшем угле падения луч не пройдет сквозь стопку? Показатель преломления верхней пластины равен n, число пластин равно N.

4.11. Свет от источника, висящего над аквариумом, падает конусом с углом раствора 2α. Аквариум высоты h_0 заполнен водой, на нем, касаясь воды, лежит плоское стекло толщины h. На сколько изменится радиус светового пятна на дне аквариума, если убрать стекло и слить воду? Показатели преломления стекла и воды равны n и n_0, $n_0 < n$.

4.12. Трубу радиуса r_0, по которой распространяется свет, замыкает шар того же радиуса. Внутренняя сферическая область шара радиуса $r < r_0$ заполнена веществом, поглощающим свет. Оболочка поглощающей области сделана из стекла с показателем преломления n. Какая доля энергии света проходит сквозь шар? Центры шара и его поглощающей свет области совпадают. Отражением света от оболочки пренебречь.

4.13*. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано небольшое отверстие радиуса r, через которое вытекает струя. По оси отверстия направляется горизонтально тонкий луч света. При какой высоте h уровня жидкости над отверстием луч света сможет выйти из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения? Считать показатель преломления n достаточно большим. Изменением поперечного сечения струи пренебречь.

4.14*. На плоскости зачернен круг радиуса $r_0 = 0{,}2$ м. Стеклянный конус упирается вершиной в центр круга так, что его ось перпендикулярна плоскости. Каков видимый радиус круга, если на него смотреть с большого расстояния вдоль оси конуса? Угол при вершине конуса $2\alpha = 60°$, радиус основания $r = r_0 = 0{,}2$ м, показатель преломления стекла $n > \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

4.15. Узкий пучок света, пройдя через стеклянное полушарие с показателем преломления n параллельно его оси симметрии, собирается на расстоянии x от выпуклой поверхности. На каком расстоянии от плоской поверхности полушария соберется луч, если пустить пу-

чок с обратной стороны? Считать, что углы между лучами света и главной оптической осью малы *).

4.16. На каком расстоянии от стеклянного шара радиуса r следует поместить точечный источник света S, чтобы его изображение S' оказалось с другой стороны от шара на таком же расстоянии? Показатель преломления стекла равен n. Изображение создается узким пучком лучей, близких к оптической оси.

4.17. В полый цилиндрический сосуд, закрытый с обеих сторон плосковыпуклыми линзами, налита вода. Главные оптические оси линз совпадают с осью цилиндра. Вдоль оси на линзу падает параллельный пучок света. При каком расстоянии между линзами свет выйдет из устройства параллельным пучком? Показатель преломления воды равен n. Фокусные расстояния линз в воздухе равны F. Считать, что углы между лучами света и главной оптической осью малы.

4.18. Внутри стеклянного шара радиуса $r=0{,}1$ м слева от его центра вблизи поверхности находится точечный источник света S (рис. 4.18). На каком расстоянии справа от центра шара радиус светового пучка, вышедший из шара, будет равен r? Показатель преломления стекла $n=2$.

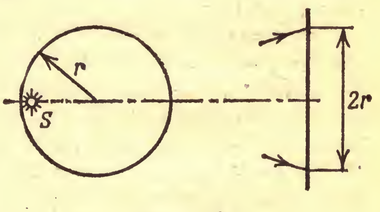


Рис. 4.18

4.19. Внутри стеклянного шара радиуса r находится точечный источник света S, излучающий свет равномерно во все стороны. Шар пропускает в окружающее пространство (воздух) половину светового потока, исходящего от точки S. Найти расстояние от точки S до центра шара. Поглощением света в шаре пренебречь. Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

§ 3. Линзы

4.20°. Четкое изображение лампы на экране возникает при двух положениях линзы, помещенной между ними. Найти фокусное расстояние линзы. Расстояние между

---

*) При решении задач следует учесть, что если угол α мал, то $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

двумя положениями линзы равно l, между лампой и экраном — равно L.

4.21. 1. Полая двояковогнутая стеклянная линза помещена в воду. Фокусное расстояние линзы в воде равно F. Найти длину изображения стрелки, расположенной на оптической оси между точками, отстоящими от линзы на расстоянии $F/4$ и $3F/4$. Что будет с изображением, если центральную часть линзы закрыть непрозрачным кружком, площадь которого составляет половину площади поверхности линзы? Внутри полости линзы находится воздух, стенки ее тонкие. Решение обосновать построением.

2. Полая двояковыпуклая стеклянная линза помещена в воду. Найти длину изображения стрелки, расположенной на оптической оси вплотную к линзе, если длина самой стрелки равна фокусному расстоянию линзы F. Внутри полости линзы находится воздух, стенки ее тонкие. Решение обосновать построением.

4.22. Полая двояковыпуклая стеклянная линза помещена в воду на глубину h так, что ее главная оптическая ось перпендикулярна поверхности воды. Снизу на линзу направлен узкий параллельный пучок света. Пучок распространяется вдоль главной оптической оси. Найти расстояние от линзы, на котором соберутся лучи света. Фокусное расстояние линзы в воде равно F (причем $F > h$). Показатель преломления воды равен n. Считать, что углы между лучами и главной оптической осью малы.

4.23. На главной оптической оси OO' собирающей линзы расположено плоское зеркало, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 4.23). На зеркало падает параллельный пучок лучей, который после отражения фокусируется на экране. Найти мгновенную скорость светового пятна на экране в момент, когда оно проходит точку B, находящуюся на главной оптической оси. Плоскость экрана перпендикулярна этой оси. Фокусное расстояние линзы равно F.

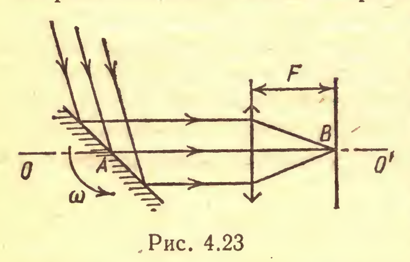


Рис. 4.23

4.24. Стеклянный конус, собирающая линза и экран расположены так, как показано на рис. 4.24. Главная

оптическая ось линзы совпадает с осью конуса и перпендикулярна экрану. Расстояние между экраном и линзой равно фокусному расстоянию линзы F. Вдоль оптической оси на конус падает слева узкий параллельный пучок света. Найти форму и наибольший размер пучка на экране. Показатель преломления стекла равен n. Угол между образующей конуса и его основанием равен α. Угол α мал.

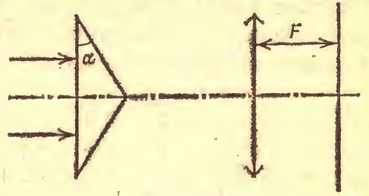


Рис. 4.24

4.25*. Вершину конуса с углом раствора 2α рассматривают через лупу, имеющую фокусное расстояние F и расположенную от нее на расстоянии d $(d < F)$. Найти видимый через лупу угол раствора конуса. Главная оптическая ось линзы проходит через ось симметрии конуса.

4.26*. При фотографировании удаленного объекта перед фотоаппаратом на тройном фокусном расстоянии объектива поместили тонкую линейку длины $2l$. Плоскость линейки перпендикулярна оптической оси фотоаппарата. Объектив — тонкая линза диаметра $2r < 2l$. Найти длину тени на пленке (то есть размер области, в которой линейкой будут затенены все лучи, исходящие от фотографируемого объекта).

4.27. Жука фотографируют в двух масштабах, поднося фотоаппарат на расстояние d, равное сначала тройному, а затем пятикратному фокусному расстоянию объектива. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одинаковой? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше d.

4.28*. При фотографировании Луны с Земли с помощью объектива, имеющего фокусное расстояние F, получено нечеткое изображение Луны в виде круга радиуса r_1. Четкое изображение Луны должно иметь радиус r_2. На какое расстояние нужно сместить фотопластинку, чтобы изображение получилось четким? Диаметр линзы равен D. Областью изображения считать ту область, куда попадает хотя бы один луч от Луны. Дифракцию света на диафрагме объектива не учитывать.

4.29. Параллельный пучок света рассеивается, проходя сквозь пластинку (рис. 4.29). Максимальный угол отклонения лучей от первоначального направления для каждой точки пластинки равен α. Какой наименьший

радиус светлого пятна можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу, имеющую фокусное расстояние F?

4.30. Плоскую поверхность плосковыпуклой линзы, фокусное расстояние которой равно F, посеребрили. Найти фокусное расстояние получившегося зеркала. Свет падает со стороны стекла.

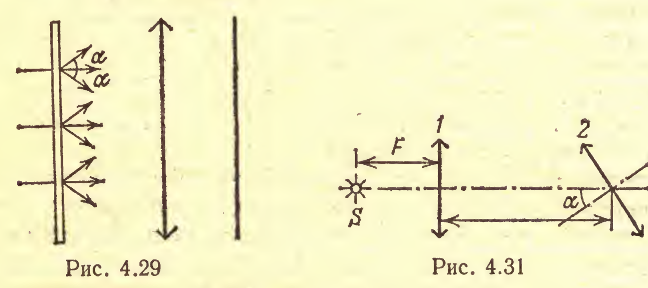


Рис. 4.29 Рис. 4.31

4.31. Две одинаковые собирающие линзы 1 и 2, имеющие каждая фокусное расстояние F, расположены так, что их главные оптические оси составляют угол α и главная оптическая ось первой линзы проходит через центр второй линзы (рис. 4.31). На главной оптической оси первой линзы на расстоянии F расположен точечный источник света S. Найти расстояние между источником света и его изображением в паре линз. Расстояние между центрами линз равно l.

4.32. Две одинаковые собирающие линзы 1 и 2, имеющие каждая фокусное расстояние F, расположены так,

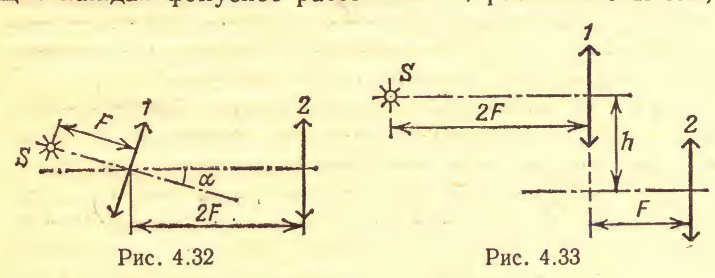


Рис. 4.32 Рис. 4.33

что их главные оптические оси образуют угол α и главная оптическая ось второй линзы проходит через центр первой (рис. 4.32). В фокусе первой линзы расположен точечный источник света S. Найти расстояние между источником света и его изображением в паре линз. Расстояние между центрами линз равно $2F$.

4.33. Две собирающие линзы с одинаковыми фокусными расстояниями F расположены на расстоянии F друг от друга (рис. 4.33). Оптическая ось первой линзы параллельна оптической оси второй линзы и находится на расстоянии h от нее. Найти расстояние между точечным источником света S, расположенным на расстоянии $2F$ от первой линзы на ее главной оптической оси, и его изображением в паре линз.

4.34. Слева от собирающей линзы, имеющей фокусное расстояние F, находится на расстоянии $(5/3)F$ непрозрачный экран с круглым отверстием диаметра $D_0=2$ см, а справа от нее на расстоянии $(3/4)F$ плоское зеркало (рис. 4.34). Экран и зеркало перпендикулярны главной оптической оси линзы, которая проходит через центр отверстия. Слева перпендикулярно экрану падает параллельный пучок света. Найти диаметр светлого пятна на экране.

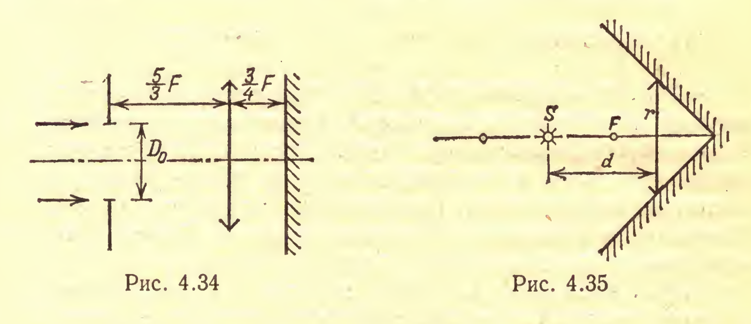


Рис. 4.34 Рис. 4.35

4.35*. Два плоских зеркала образуют двугранный угол, равный 90°. В угол вставлена собирающая линза, имеющая фокусное расстояние F, так, что ее главная оптическая ось составляет угол 45° с каждым зеркалом (рис. 4.35). Радиус линзы $r=F$. На главной оптической оси линзы на расстоянии $d=1{,}5\ F$, находится источник света S. Найти положение одного из изображений источника света, которое находится на главной оптической оси.

§ 4. Фотометрия

4.36°. Светящаяся лампочка висит на высоте h над столом. На каком расстоянии от точки стола, находящейся непосредственно под лампой, освещенность стола уменьшается в n раз?

4.37. Два плоских зеркала образуют двугранный угол, равный 90°. Точечный источник света S помещен внутри угла так, что расстояния от него до вертикальной и горизонтальной граней угла равны l и $2l$ (рис. 4.37). На расстоянии $2l$ от вертикального зеркала параллельно ему расположен экран. Найти освещенность в точке экрана, расположенной на расстоянии l от горизонтального зеркала. Сила света источника равна J.

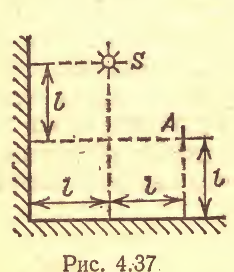


Рис. 4.37

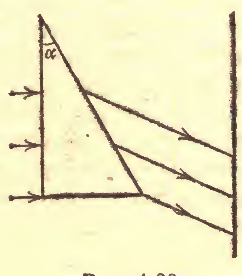


Рис. 4.38

4.38. Экран освещается солнечным светом, падающим перпендикулярно его плоскости. Как изменится освещенность экрана, если на пути света поставить стеклянную призму с углом при вершине α (рис. 4.38)? Грань, на которую падает свет, параллельна плоскости экрана. Показатель преломления стекла равен n. Считать, что отражения света от граней призмы нет.

4.39*. Осколком плоского зеркала A неправильной формы пускают солнечный зайчик в точку B и в точку C на вертикальной стене (рис. 4.39). Зайчик в точке B

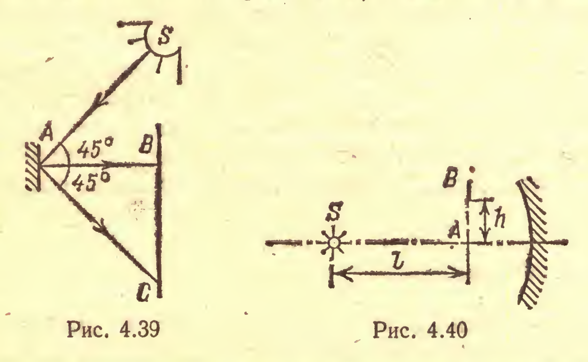


Рис. 4.39 Рис. 4.40

оказывается круглым, а освещенность его в центре втрое больше, чем на участках стены, освещенных только рас-

сеянным светом. Какова освещенность в центре зайчика, попавшего в точку C? Лучи SA, AB и AC лежат в одной вертикальной плоскости, луч AB горизонтален, $\angle SAB = \angle BAC = 45°$.

4.40. Перед сферическим зеркалом радиуса r, в фокусе которого находится точечный источник света S, на расстоянии l от источника помещена небольшая пластинка, плоскость которой перпендикулярна оптической оси зеркала (рис. 4.40). Найти отношение освещенностей левой и правой сторон пластинки. Высота, на которую поднята над оптической осью пластинка, равна h.

4.41. Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высота Луны и Солнца над горизонтом одинакова. Считать, что Луна рассеивает весь падающий на нее свет равномерно по всей полусфере. Расстояние от Луны до Земли $l = 4 \cdot 10^5$ км, радиус Луны $r = 2 \cdot 10^3$ км.

Глава V. ЗАДАЧИ-ОЦЕНКИ

Задачи-оценки — новый для большинства школьников и абитуриентов класс задач.

Для решения задачи надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить числовой результат, более или менее соответствующий реальности.

Хорошо представляя явление или задачу, каждый сам может выбрать необходимые для решения величины и их числовые значения. Естественно, что спектр возможных числовых ответов широк (приводимые в задачнике — некоторые из возможных), а сам подход к получению ответа необычен, непривычен для школьника (в школах с такими задачами, как правило, не знакомят). Между тем грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный этап начальной постановки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки, контроля за правильностью рассуждений и выводов в процессе обсуждения сложных идей. Оценки иногда подсказывают путь точного решения задачи, дают возможность просто установить границы области применимости точного решения. Владение методом оценок, наряду с интуицией, является очень важным качеством исследователя при разработке и анализе новых идей, весьма существенным в творческой работе. Надо полагать, что способность решать задачи-оценки должна входить в ряд критериев при отборе претендентов на исследовательскую работу и, в частности, для учебы на физических факультетах вузов.

5.1. Оценить, на сколько дальше спортсмен бросит гранату, если будет бросать ее с разбега.

5.2. Оценить время вытекания воды из заполненной ванны.

5.3. Оценить число оборотов (кувырков), которые совершит автомобиль, свободно упавший в километровую пропасть на полной скорости.

5.4. Летящий горизонтально сверхзвуковой самолет внезапно встречается с препятствием, которое возвышается на 100 м над его траекторией. Оценить минимальное расстояние от препятствия, на котором летчик должен начать набирать высоту, чтобы избежать столкновения.

5.5. На сколько и в какую сторону от вертикали отклонится в высшей точке полета артиллерийский снаряд, запущенный на экваторе в вертикальном направлении?

5.6. Оценить размеры дирижабля, заполненного гелием. Грузоподъемность дирижабля равна 100 т.

5.7. Оценить глубину ямы на поверхности воды под вертолетом, зависшим над озером на небольшой высоте.

5.8. Каким станет давление атмосферы, если вся вода в океанах испарится?

5.9. Оценить давление воздуха в шахте, глубина которой равна 10 км.

5.10. С какой наименьшей скоростью можно ехать на водных лыжах?

5.11. Оценить силу натяжения цепи велосипеда при езде в гору.

5.12. С какой минимальной частотой человек должен вращать ведро с водой в вертикальной плоскости, чтобы вода не выливалась?

5.13. Гимнаст делает на перекладине оборот — «солнышко». С какой силой он действует на перекладину в момент, когда проходит нижнее положение?

5.14. На сколько отличаются расстояния от уровня мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе?

5.15. Оценить среднюю плотность вещества Солнца.

5.16. Оценить скорость опускания парашютиста с раскрытым парашютом.

5.17. При какой наименьшей скорости велосипедист может перевернуться через голову вместе с велосипедом, если переднее колесо застрянет, провалившись в щель?

5.18. Оценить силу натяжения ремней безопасности, удерживающих человека в автомобиле, если автомобиль, движущийся со скоростью $v \approx 30$ км/ч, столкнулся со столбом, в результате чего у автомобиля появилась вмятина глубины $l \approx 30$ см.

5.19. Оценить мощность, выделяющуюся в виде тепла при экстренном торможении грузовика.

5.20. Оценить отношение мощности, развиваемой кузнечиком при прыжке, к его массе.

5.21. Пятью ударами молота гвоздь забили в деревянную стену. Какую силу нужно приложить к шляпке гвоздя, чтобы выдернуть его?

5.22. Оценить среднее усилие, развиваемое ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа.

5.23. Оценить усилие спортсмена при толкании ядра.

5.24. Оценить давление шариковой ручки на бумагу при письме.

5.25. Длинная труба, закрытая снизу гладким поршнем, на котором помещен снаряд, опущена в озеро Байкал. До какой максимальной скорости сила давления воды может разогнать снаряд?

5.26. Оценить давление газов в стволе ружья, возникающее при выстреле. Ружейная пуля при вылете из ствола имеет скорость около $8 \cdot 10^2$ м/с.

5.27. С какой скоростью летела капля воды, если при ударе о неподвижную стену она оказывает на нее силу давления около 10^6 Па.

5.28. Оценить давление в центре Земли.

5.29. Оценить наибольшее давление в полной цистерне машины для поливания улиц при ее торможении. Тормозной путь при скорости $v \approx 30$ км/ч $l \approx 5$ м.

5.30. Оценить скорость пуль, вылетающих из патронов, брошенных в костер. Скорость пули при стрельбе из ружья равна приблизительно 800 м/с.

5.31. Представьте, что в какой-то момент у всех молекул воздуха, находящихся внутри лежащего на земле футбольного мяча, скорость оказалась бы направленной вертикально вверх. На какую высоту взлетел бы мяч?

5.32. Какая часть атмосферного кислорода Земли израсходуется при сжигании двух миллиардов тонн угля. (Эта цифра близка к данным о мировой добыче угля за год).

5.33. Оценить выталкивающую силу, действующую на человека со стороны воздуха в комнате.

5.34. Какая масса воздуха уйдет из аудитории при повышении в ней температуры на 10 К?

5.35. Осветительная лампочка имеет тонкостенный непрочный баллон и заполняется инертным газом. Из каких соображений выбирается давление газа? Оценить это давление.

5.36. Оценить силу, необходимую для того, чтобы оторвать от спины хорошо поставленную медицинскую банку.

5.37. Оценить среднее усилие, которое нужно приложить к краю надувного матраца, чтобы согнуть этот матрац посредине под углом 90°. Матрац не имеет поперечных перетяжек и хорошо надут.

5.38. Оценить скорость воздуха, с которой можно выдувать его ртом через трубку.

5.39. Оценить время уменьшения в два раза давления газа в спутнике Земли из-за сантиметровой пробоины в его стенке.

5.40. За сколько ходов велосипедного насоса можно накачать футбольный мяч?

5.41. Детский воздушный шарик надувают горячим воздухом. При какой температуре воздуха в нем шарик будет подниматься?

5.42. Оценить максимальный радиус полости, образующейся при подводном взрыве на глубине 1 км заряда взрывчатого вещества массы 1 т. Энергия взрыва 1 г взрывчатого вещества равна примерно 4 кДж.

5.43. Оцените расстояние между центрами ближайших светочувствительных элементов вашего глаза.

5.44. Во сколько раз собирающая линза от очков увеличивает на единицу площади мощность света, приходящего от Солнца.

5.45. Оценить размеры неоднородностей дорожки звукозаписи на долгоиграющей пластинке.

Глава VI. ЗАДАЧИ-ДЕМОНСТРАЦИИ

В задачах-демонстрациях надо объяснить физическое явление, которое демонстрируется в аудитории на экзамене. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить и указать главный.

В задачнике этот новый для экзаменов класс задач превратился в набор качественных задач по физике. Однако при желании практически все задачи легко воспроизводятся в виде демонстрации в школьном кабинете физики и тем более в вузовском демонстрационном кабинете. Некоторые из задач несложно «оживить» и дома.

6.1. Объяснить, почему гвозди, повисшие рядом на магните, отклоняются от вертикального положения.

6.2. Объяснить, почему гвоздь вытаскивается легче, если его согнуть и тащить, поворачивая при этом вокруг оси.

6.3. Объяснить изменения характера отскоков подвешенного на нити упругого шарика после ударов о круглое препятствие при перемещениях последнего по горизонтали (рис. 6.3).

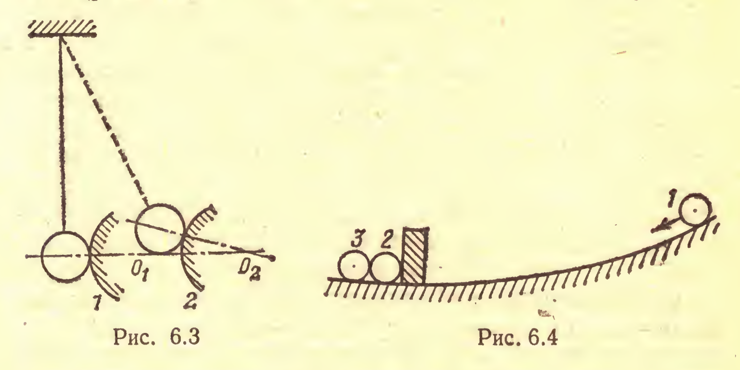


Рис. 6.3 Рис. 6.4

6.4. Скатившись с горки, шарик *1* налетает на два таких же шарика *2* и *3*, стоящих рядом. Крайний слева шарик *3* после этого откатывается, а шарики *1* и *2* стоят. Опыт видоизменяется так, что теперь шарик *1* налетает не на шарик *2*, а на довольно толстую резиновую прокладку, стоящую между ними (рис. 6.4). При ударе через прокладку откатываются, причем оба вместе, шарики *2* и *3*. Объяснить различие в поведении шариков в первом и во втором случаях.

6.5. Грузик на нити подвешен к подставке, которая может скользить по столу. Грузик раскачивают, дергая за нить только в одном направлении. В первом случае

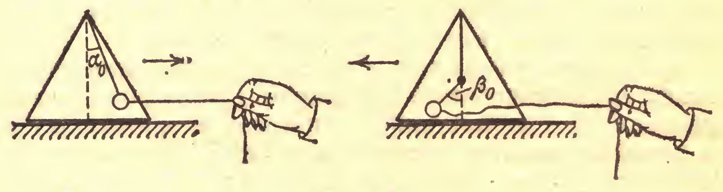


Рис. 6.5

движение маятника из отклоненного положения происходит свободно (рис. 6.5, слева). Во втором случае движение маятника ограничено препятствием, жестко соединенным с подставкой (рис. 6.5, справа). Объяснить, почему в этих случаях различен характер движения подставки с маятником.

6.6. Гильза *1* может надеваться на пластмассовый стержень *2*, сквозь который проведены провода электрической цепи *3* для поджигания горючей смеси *4* (рис. 6.6). Сначала зажигание смеси демонстрируется без гильзы. Затем надевается гильза. В первом случае стержень закрепляется на легкой проволочке — пружинке *5*. Смесь поджигается, гильза взлетает. Во втором случае стержень закрепляется не на пружинке, а на массивном штативе. После зажигания гильза взлетает значительно выше. Объяснить эффект.

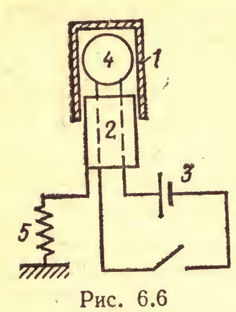


Рис. 6.6

6.7. В герметически закрытом сосуде, частично заполненном водой, плавает игрушка — «водолаз». В сосуд вставляют трубку. Если в трубку подуть, «водолаз» тонет. Если перестать дуть в трубку, оставив ее открытой, то «водолаз» всплывает, а иногда так и остается под водой. Объяснить поведение игрушки.

6.8. Пламя горелки коптит. Если поднести сверху вертикальную стеклянную трубку, копоть пропадает, однако появляется снова, если трубку закрыть сверху. Объяснить явление.

6.9. В сосуде, закрытом подвижным поршнем, находятся газ и вата, смоченная ацетоном. Поршень поднимают. Объяснить характер изменения давления в сосуде. Давление измеряется жидкостным манометром.

6.10. Объяснить, почему прекращается вращение находящейся под постоянным напряжением Z-образной вертушки, если на эту вертушку надеть проволочный каркас, имеющий с ней электрический контакт.

6.11. Между пластинами плоского конденсатора подвешен легкий металлический шарик. При подаче на конденсатор постоянного напряжения шарик притягивается к одной из пластин, касается ее и отскакивает к другой пластине. Такие перескоки повторяются многократно. Объяснить явление.

6.12. Между заземленным и заряженным металлическими шарами на изолированной нити висит незаряженный металлический шарик. Объяснить его поведение при перемещении заряженного шара.

6.13. Железный стержень вставлен в катушку. На стержень надевают кольцо. В первом случае это кольцо алюминиевое сплошное, а во втором — алюминиевое с

разрезом. При пропускании переменного тока через катушку кольца ведут себя существенно по-разному. Объяснить явление.

6.14. Две магнитные катушки, включенные последовательно и питаемые переменным током, подвешены близко друг к другу так, что их оси совпадают. Между катушками поочередно вставляются медный и железный листы. Почему притягивавшиеся катушки начинают отталкиваться, когда между ними вставлен медный лист? Почему картина меняется, если вместо медного листа вставить железный?

6.15. Катушка из медного провода может колебаться между полюсами постоянного магнита. Как будут различаться колебания при разомкнутых и закороченных концах катушки? Объяснить наблюдаемые явления.

6.16. На лабораторном столе стоят два динамика (источники звука). Включают один динамик, затем выключают. Потом включают и выключают другой динамик. На слух громкость и высота тона обоих динамиков одинаковы. Когда оба динамика включают вместе, слышны медленные колебания громкости звука. Почему возникают эти колебания?

6.17. Как объяснить изменение громкости звучания струны, по которой течет переменный ток звуковой частоты, при перемещении вдоль нее магнита?

6.18. В цилиндрической трубе возбуждаются гармонические звуковые колебания определенной частоты с помощью динамика *1*, установленного на одном из ее концов (рис. 6.18). Длина трубы при перемещении поршня

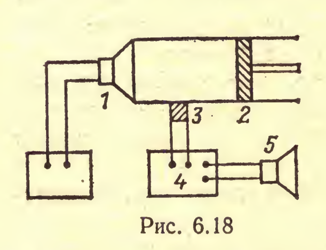


Рис. 6.18

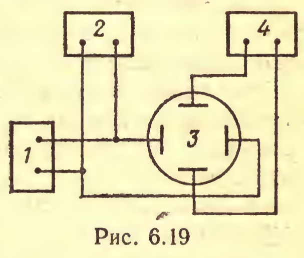


Рис. 6.19

2 изменяется. На боковой стенке трубы находится микрофон *3*, сигнал с которого через усилитель *4* подается на динамик *5*. Объяснить, почему при перемещении поршня изменяется громкость звукового сигнала динамика *5*. Можно ли этот эксперимент использовать для определения параметров колебательного процесса в трубе?

6.19. От генератора *1* звуковых частот гармоническое напряжение подается на динамик *2* и на горизонтально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) *3* (рис. 6.19). На вертикально отклоняющие пластины ЭЛТ подается сигнал с микрофона *4*, который является приемником звуковых колебаний, возбуждаемых динамиком *2*. Объяснить, в чем причина тех изменений, которые наблюдаются на экране ЭЛТ при перемещении микрофона *4* относительно динамика *2*. Можно ли использовать этот эксперимент для определения скорости звука?

6.20. Электрическая цепь, состоящая из двух катушек индуктивности и лампочки, подключена к генератору переменного напряжения. Если в одну из катушек вдвинуть железный сердечник, то свечение лампочки усиливается. Если же сердечник вдвинуть во вторую катушку, то свечение лампочки ослабевает. Нарисовать схему электрической цепи. Объяснить явление.

6.21. Имеются два различных источника напряжения, обеспечивающие одинаковую интенсивность свечения электрической лампочки. При кратковременном подключении к выходным клеммам катушки индуктивности только один источник дает интенсивный дуговой разряд. Объяснить наблюдаемое явление.

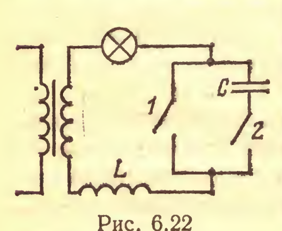


Рис. 6.22

6.22. Почему при замыкании ключа *1* лампочка, включенная в цепь, как показано на рис. 6.22, горит слабее, чем при замыкании ключа *2*?

6.23. Диск с одной белой полосой приводится во вращение и освещается лампой пульсирующего света (стробоскоп). В свете лампы видны три полосы, расположенные под углом 120°. Найти по наблюдаемой картине угловую скорость вращения диска. Частота пульсаций лампы известна.

6.24. Между двумя плоскими параллельными зеркалами расположен источник света — электрическая лампочка. На экране после включения лампочки появляются светлые и темные полосы. Нарисовать схему опыта и объяснить явление.

6.25. Свет, пройдя стопу плоских тонких стеклянных пластин, погруженных в воду, создает на экране изображение букв: НГУ. В отсутствие воды изображение исчезает. Объяснить эффект.

6.26. Включают источник света и регистрируют ток фотоэлемента. Затем на пути света ставят толстую плоскопараллельную прозрачную стеклянную пластину. Сначала источник света — обычная лампочка накаливания, потом — источник параллельных лучей. Фототок после внесения пластины в первом случае возрастает, во втором — падает. Объяснить эффект.

6.27. После прохождения света через собирающую линзу на экране хорошо виден темный круг, окаймленный светлым кольцом. Объяснить наблюдаемое явление.

6.28. Спираль лампочки накаливания проецируется на экран объективом. Часть линзы объектива перекрыта полоской из непрозрачного материала. При смещении лампочки из плоскости оптимальной фокусировки происходят характерные изменения изображения. Описать и объяснить наблюдаемое явление.

6.29. На блестящей консервной банке есть плоская вмятина, от которой на экран отражается свет. В банку наливают охлажденную жидкость. Отраженный сигнал явно гаснет. Объяснить явление.

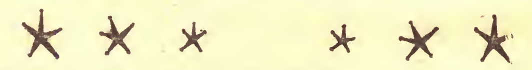


Рис. 6.30

6.30. При падении под небольшим углом на толстую стеклянную пластину узкого пучка света на экране отчетливо видны несколько пятен разной яркости (рис. 6.30). Объяснить наблюдение.

6.31. Сквозь молоко, налитое в цилиндрический стеклянный сосуд, пропускают узкий интенсивный пучок света вдоль и поперек оси сосуда и регистрируют интенсивность прошедшего сигнала. При разбавлении молока интенсивность продольного сигнала не изменяется, а интенсивность поперечного — существенно увеличивается. Объяснить явление.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава I. МЕХАНИКА

§ 1. Кинематика. Относительность движения

1.1. Ветер, дующий горизонтально, не может изменить вертикальной составляющей скорости дождя. С учетом этого имеем

$$u_1/v=\operatorname{tg} 30°, \quad u_2/v=\operatorname{tg} 45°=1;$$

$$◀ \ u_2=u_1/\operatorname{tg} 30°=10 \operatorname{ctg} 30° \text{ м/с}=17 \text{ м/с} \ ▶.$$

1.2. $◀ \ t=\pi R \dfrac{c_1+c_2}{2c_1c_2} \ ▶.$

1.3. $◀ \ t=\dfrac{l}{(c^2-u^2)^{1/2}}=11$ с, $c>u$ ▶.

1.4. При продольном ветре $t_1=\dfrac{2lv}{(v^2-u^2)}$. При поперечном ветре $t_2=\dfrac{2l}{(v^2-u^2)^{1/2}}$. Таким образом,

$$◀ \ \frac{t_1}{t_2}=\left[1-\left(\frac{u}{v}\right)^2\right]^{-1/2}, \ u<v \ ▶.$$

1.5. Если лодка неподвижна, то расстояние между передним и задним фронтами звукового сигнала равно $c\tau_0$. Из-за движения лодки (за время τ_0 она пройдет путь $v\tau_0$) это расстояние уменьшается на $v\tau_0$. Отразившись от дна, сигнал придет к лодке со скоростью $v+c$ и пройдет через приемник звуковых сигналов, находящийся на лодке, за время

$$\tau=\frac{(c\tau_0-v\tau_0)}{(v+c)}.$$

Отсюда

$$◀ \ v=c\frac{(\tau_0-\tau)}{(\tau_0+\tau)} \ ▶.$$

1.6. Каждый осколок вращавшейся в момент взрыва бомбы за время t удаляется от оси цилиндра в радиальном направлении на расстояние l_1, в другом, перпендикулярном ему,— на расстояние

$\omega R t$. Таким образом, искомое расстояние

◀ $l_2 = (\omega^2 R^2 t^2 + l_1^2)^{1/2}$ ▶.

1.7. Когда звук придет из точки B в точку D, самолет уже окажется в точке C (рис. О.1.7), причем $BC = vt$, $BD = ct$,

$$AB = h\,\mathrm{tg}\,\alpha = h\,\mathrm{tg}\,\varphi - vt,$$

$$BD = ct = h\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{v}{c}\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}.$$

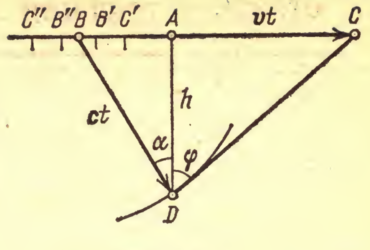


Рис. О.1.7

Введем число Маха $\mathrm{M} = v/c$. Тогда имеем

$$(1 - \mathrm{M}^2)\,\mathrm{tg}^2\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{M}^2 = 0.$$

Отсюда

◀ $\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} = \left[\mathrm{tg}\,\varphi \pm \mathrm{M}\,(\mathrm{tg}^2\varphi + 1 - \mathrm{M}^2)^{1/2}\right](1 - \mathrm{M}^2)^{-1}$ ▶.

В дополнение к ответу полезно отметить некоторые особенности восприятия на слух движения сверхзвукового самолета.

Человек с помощью своих органов слуха довольно хорошо определяет направление на точечный источник звука. В тот момент времени, когда он, находясь в точке D, услышит звук, пришедший из точки B со скоростью c, самолет окажется далеко от нее, в точке C. В точку B придет фронт ударной волны, рожденной сверхзвуковым движением самолета. Будет слышен характерный «хлопок», так как почти одновременно придут сферические волны из некоторой окрестности $B'B''$ точки B. Далее начнут одновременно приходить уже существенно более слабые звуки из областей траектории самолета $B'C'$ и $B''C''$. Человек в принципе должен был бы отметить, что вдоль реальной траектории самолета от точки B движутся в противоположные стороны два точечных источника звука. Эти звуки очень быстро затухают, и в действительности на этот реально существующий эффект никто не обращает внимания.

1.8. ◀ $t = \dfrac{v}{a}\left[1 \pm \left(1 - \dfrac{2al}{v^2}\right)^{1/2}\right]$, $v^2 > 2al$ ▶.

1.9. Пусть τ — время опоздания. Тогда длина вагона по условию задачи

$$l = \frac{a\,(\tau + t_1)^2}{2} - \frac{a\tau^2}{2} = \frac{at_2}{2}\left(2\tau + 2t_1 + t_2\right).$$

Это же условие можно записать иначе:

$$2\tau t_1 + t_1^2 = 2\tau t_2 + 2t_1 t_2 + t_2^2.$$

Отсюда

◀ $\tau = \dfrac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2\,(t_1 - t_2)}$ ▶.

1.10. ◀ $k=\frac{l}{gt^2}=0{,}1$ ▶.

1.11. По горизонтали второй камень движется равномерно. По вертикали оба камня движутся с ускорением g. Таким образом,

$$l=(v\cos\alpha)(t-\tau),$$

где τ — искомое время между бросками;

$$vt-\frac{gt^2}{2}=(v\sin\alpha)(t-\tau)-\frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Отсюда

$$t=\frac{v}{g}+\left[\left(\frac{v}{g}\right)^2-\frac{2l}{g}\operatorname{tg}\alpha+\left(\frac{l}{v\cos\alpha}\right)^2\right]^{1/2},$$

где $(v\sin\alpha)^2>gl$. Знак «+» в решении квадратного уравнения выбран из условия, что соударение должно произойти лишь после того, как первый камень начнет двигаться вниз ($t>v/g$). С учетом этого имеем

$$◀\ \tau=t-\frac{l}{v\cos\alpha}=1{,}2\text{ с}\ ▶.$$

1.12. Из сравнения вертикальных и горизонтальных перемещений камня и утки имеем

$$(v\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}=h,\quad (v\cos\alpha)t=h\operatorname{ctg}\alpha+ut.$$

Отсюда

$$◀\ h=\frac{2u}{g}(v\cos\alpha-u)\operatorname{tg}^2\alpha,\quad v\cos\alpha>u\ ▶.$$

1.13. Рассмотрение равноускоренного движения мяча по вертикали приводит к уравнению

$$h=(v\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2},\quad t=\frac{v\sin\alpha}{g}-\left[\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right)^2-2\frac{h}{g}\right]^{1/2}.$$

Знак «+» отброшен, так как он дает время «полета» по траектории, не имеющей излома. Расстояние, пройденное мячом по горизонтали за все время движения $2t$,

$$l=(v\cos\alpha)2t=\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha\left[1-\left(1-\frac{2gh}{(v\sin\alpha)^2}\right)^{1/2}\right],$$

где $h<\frac{(v\sin\alpha)^2}{2g}$, так как есть удар о потолок. Подстановка числовых данных дает ◀ $l=5$ м ▶.

1.14. Скорость шарика максимальна в момент удара о стенку. Из симметрии задачи и с учетом того, что скорость шарика у стенки перпендикулярна касательной плоскости, имеем

$$v_{max}=\frac{g\tau}{2\sin\alpha}=7\text{ м/с}.$$

Скорость шарика при пересечении оси лунки (она же горизонтальная скорость) минимальна:

$$v_{\min}=v_{\max}\cos\alpha.$$

Отсюда

$$◀\ v_{\min}=\frac{g\tau}{2}\operatorname{ctg}\alpha=5\text{ м/с}\ ▶.$$

1.15. Расстояние по горизонтали, на которое летят осколки, начавшие движение под углом α к горизонту,

$$l=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Радиус круга

$$R=\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha',$$

Осколки, вылетевшие под углом внутри области $\alpha'\leqslant\alpha\leqslant\pi/2-\alpha'$, где

$$\alpha'=\frac{1}{2}\arcsin\frac{Rg}{v^2},$$

вылетят за пределы круга радиуса R.

Отношение массы вылетевших за круг радиуса R осколков к общей массе будет равно отношению площади S кольца на поверхности взрывающегося шара (размеры кольца ограничены углами α' и $\pi/2-\alpha'$) к площади поверхности шара S_0. Если r — радиус шара, имеем

$$\frac{S}{S_0}=\frac{2\pi r}{4\pi r^2}\left(h_2-h_1\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha'\right)-\sin\alpha'\right]=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right).$$

Таким образом,

$$◀\ m=\frac{M}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right)\ ▶.$$

1.16. За условие минимальности угла бросания α примем касание мяча передней и задней точек дужки кольца (рис. О.1.16). Тогда $\sin\beta=r/R$. Если время полета мяча равно t, а его скорость при броске равна v_0, то

$$l=(v_0\cos\alpha)\,t,$$

$$H-h=(v_0\sin\alpha)\,t-gt^2/2.$$

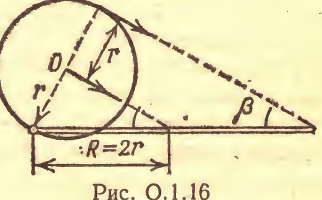


Рис. О.1.16

Горизонтальная составляющая скорости мяча при касании передней точки дужки $v_x=v_0\cos\alpha$, а вертикальная $v_y=v_0\sin\alpha-gt$. Тогда

$\operatorname{ctg}\beta=-v_y/v_x$. Решая получившуюся систему уравнений, находим

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left[2\frac{H-h}{l}+\frac{r}{(R^2-r^2)^{1/2}}\right], \blacktriangleleft\ \alpha=45^\circ\ \blacktriangleright.$$

Несколько упрощается решение задачи, если рассматривать движение мяча по обратной траектории: из кольца в руки баскетболиста.

1.17. Если перейти в систему отсчета, в которой конус покоится, то станет ясно, что осколки, летевшие вертикально вверх и вниз, в новой системе будут двигаться вправо под углами 45° к горизонту, то есть вдоль образующей конуса, и на него не попадут. Все осколки, летевшие правее, а их ◀ половина ▶, таким образом, попадут на конус.

1.18. В системе координат, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$, осколки равной массы разлетаются в произвольных направлениях с равными по модулю и противоположно направленными скоростями $\boldsymbol{v}'$. Максимальную в неподвижной системе отсчета скорость имеют осколки, летящие в направлении движения пучка: $u=v+v'$, $u_\perp^2+v^2=v'^2$,

$$\blacktriangleleft\ u_\perp=(v'^2-v^2)^{1/2}=[u(u-2v)]^{1/2},\ u\geqslant 2v\ \blacktriangleright.$$

1.19. В системе отсчета, связанной с мухами, ядро подлетает к рою под углом α, причем

$$\cos\alpha=\frac{v}{(v^2+u^2)^{1/2}},$$

и поэтому проходит в рое путь, равный

$$\frac{d}{\cos\alpha}=d\left[1+\left(\frac{u}{v}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Окончательно

$$\blacktriangleleft\ n\frac{d\pi R^2}{\cos\alpha}=\pi ndR^2\left[1+\left(\frac{u}{v}\right)^2\right]^{1/2}\ \blacktriangleright.$$

1.20. После удара о неподвижную стенку скорость шарика меняет лишь направление. Чтобы вычислить скорость шарика после одного удара об удаляющуюся со скоростью u стенку, надо перейти в систему отсчета, в которой стенка покоится. В этой системе отсчета скорость шарика будет до удара равна v_0-u. После упругого удара скорость изменит знак: станет равной $-(v_0-u)$. Если затем вернуться в первоначальную (лабораторную) систему отсчета, где стенка движется со скоростью u, то здесь скорость шарика $v=v_0-2u$. Слагаемое $-2u$ будет добавляться после каждого удара о движущуюся стенку. Следовательно, $v=v_0-2nu$, где n — число ударов о движущуюся стенку. Таким образом, в случае а), когда происходит 20 ударов, ◀ $v=33$ см/с ▶, а в случае б), когда происходит 19 ударов, ◀ $v=17$ см/с ▶.

1.21. Шарик падает равноускоренно, при ударе о плиту меняя направление и модуль скорости. Проще всего можно провести рас-

смотрение движения в системе отсчета, связанной с плитой. В этой системе шарик имеет начальную скорость v_0, направленную вверх, и периодически ударяется о неподвижную плиту. В момент $t_0=v_0/g$ его скорость обращается в нуль, дальше движение периодическое. Время подъема и падения (полупериод этого движения) одинаково. Таким образом,

$$t=\frac{\sqrt{v_0^2+2gh}}{g}.$$

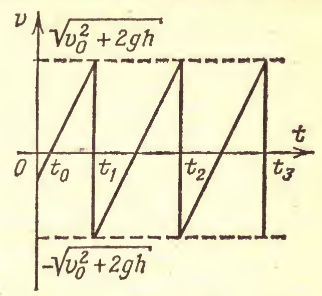


Рис. О.1.21

График зависимости скорости шарика от времени в системе отсчета, связанной с плитой, изображен на рис. О.1.21. Зависимость скорости от времени в интервале между началом движения и первым ударом шарика о плиту $v=-v_0+gt$ (далее см. график). Время первого, второго,..., n-го ударов:

$$t_1=\frac{v_0+\sqrt{v_0^2+2gh}}{g},\quad t_2=\frac{v_0+3\sqrt{v_0^2+2gh}}{g},\ \ldots,$$

$$t_n=\frac{v_0+(2n-1)\sqrt{v_0^2+2gh}}{g}.$$

1.22. Относительно стакана шарик движется вдоль его стенок с ускорением $g\cos\alpha$. Таким образом, время движения стакана до n-го удара шарика

$$t_n=(2n-1)\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}.$$

Стакан совершает вдоль наклонной плоскости равноускоренное движение без начальной скорости с ускорением $a=g\sin\alpha$:

$$s_n=\frac{(g\sin\alpha)\,t_n^2}{2}=(2n-1)^2h\operatorname{tg}\alpha;$$

$$◀\ s_5=0{,}81\text{ м}\ ▶.$$

§ 2. Динамика

1.23. Введем обозначения: L — искомый путь, l — путь, пройденный после выключения силы $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{v}$ — скорость тела после разгона, $\boldsymbol{a}$ — ускорение при разгоне. Из кинематики следует, что

$$L=l+at^2/2,\qquad v=at.$$

По второму закону Ньютона

$$ma=F-kmg.$$

Кинетическая энергия расходуется на работу против силы трения:

$$kmgl=mv^2/2,$$

Отсюда

$$◀\ L=\frac{F}{2kmg}\left(\frac{F}{m}-kg\right)t^2\ ▶.$$

1.24. ◀ $a_{max}=g\cos\alpha\,(k-\operatorname{tg}\alpha)$ ▶.

1.25. ◀ $a_{max}=g\cos\alpha\,(k-\operatorname{tg}\alpha)=1{,}1$ м/с² ▶ (см. ответ к задаче 1.24).

1.26. По второму закону Ньютона

$$ma=N\sin\alpha-kN\cos\alpha,\quad mg=kN\sin\alpha+N\cos\alpha,$$

где N — сила нормального давления бруска на цилиндр. Отсюда

$$◀\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{k+a/g}{1-ka/g}\ ▶.$$

1.27. ◀ $f=\frac{mg}{2}\sin 2\alpha$ ▶.

1.28. ◀ $T=(k_2-k_1)\frac{m_1m_2g\cos\alpha}{(m_1+m_2)}$ при $k_2>k_1>\operatorname{tg}\alpha$ ▶.

1.29. По второму закону Ньютона

$$ma=F-T_1-kmg,\ \ldots,\ ma=T_{n-1}-T_n-kmg,$$
$$ma=T_n-kmg.$$

Отсюда

$$a=\frac{F}{nm}-kg.$$

Таким образом,

$$◀\ T_i=F\left(1-\frac{i}{n}\right),\quad i=1,\ \ldots,\ n-1\ ▶.$$

1.30.

◀ $a=\frac{F}{m}(\cos\alpha-k\sin\alpha)-kg$, если $F\cos\alpha>k(mg+F\sin\alpha)$;

$a=0$, если $F\cos\alpha\leqslant k(mg+F\sin\alpha)$ ▶.

1.31.

◀ $a=\frac{F}{m}(\cos\alpha+k\sin\alpha)-kg$,

если $F\sin\alpha<mg$ и $F\cos\alpha>k(mg-F\sin\alpha)$;

$a=0$, если $F\sin\alpha<mg$ и $F\cos\alpha\leqslant k(mg-F\sin\alpha)$;

$a_{гор}=\frac{F}{m}\cos\alpha$, $a_{верт}=\frac{F}{m}\sin\alpha-g$, если $F\sin\alpha>mg$ ▶.

1.32. По второму закону Ньютона

$$m_1a=N-m_1g;\ m_2(a'-a)=m_2g-T;\quad m_1a'=T-kN,$$

где N — сила нормального давления, a' — ускорение грузов относительно стола. Тогда

$$◀\ T=\frac{m_2m_1}{m_2+m_1}(1+k)(a+g)\ \text{при}\ km_1<m_2\ ▶.$$

Если $a'=0$, то $-m_2a=m_2g-T$, $T=f<km_1(a+g)$; таким образом,

$$◀\ T=m_2(a+g) \text{ при } km_1>m_2\ ▶.$$

1.33. По второму закону Ньютона

$$ma=mg\sin\beta-2kN,$$

где сила нормального давления

$$N=\frac{mg\cos\beta}{2\sin\alpha}.$$

Таким образом,

$$◀\ a=g\left(\sin\beta-\frac{k\cos\beta}{\sin\alpha}\right)\ ▶.$$

1.34. Пусть угол между вертикалью и нитью, прикрепленной к грузу массы m_2, равен α, а ускорение груза массы m_1 относительно стола равно a'. Тогда ускорение груза массы m_1 относительно земли равно $a-a'$, горизонтальная составляющая ускорения груза массы m_2 относительно земли равна $a-a'\sin\alpha$, а вертикальная $a'\cos\alpha$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m_1(a-a')=-T+km_1g, \qquad m_2a'\cos\alpha=m_2g-T\cos\alpha,$$
$$m_2(a-a'\sin\alpha)=T\sin\alpha.$$

Два последних уравнения при исключении угла дают уравнение

$$m_2a'=-T+m_2\sqrt{a^2+g^2}.$$

Для T получаем при наличии проскальзывания ($a'>0$)

$$◀\ T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\sqrt{a^2+g^2}+kg-a\right)$$

$$\text{при } \sqrt{a^2+g^2}>\frac{m_2}{m_1}kg-\frac{m_1}{m_2}a\ ▶.$$

Без проскальзывания ($a'=0$)

$$◀\ T=m_2\sqrt{a^2+g^2} \text{ при } \sqrt{a^2+g^2}\leqslant\frac{m_2}{m_1}kg-\frac{m_1}{m_2}a\ ▶.$$

1.35. По второму закону Ньютона в первых двух случаях

$$m_1a_1=m_1g-\varkappa_1x_1, \quad a_1=\frac{m_1-m_0}{m_0+m_1}g;$$

$$m_2a_2=m_2g-\varkappa_2x_2, \quad a_2=\frac{m_2-m_0}{m_0+m_1}g.$$

В третьем случае, когда к пружине жесткости $\varkappa_1$ последовательно подвешены два груза,

$$m_0a=-m_0g+T, \quad m_1a=m_1g-T_1, \quad m_2a=m_2g-T_2,$$

где $T=T_1+T_2$ — сила натяжения нити, прикрепленной к грузу массы m_0, T_1 и T_2 — силы упругости пружин жесткости $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Отсюда

$$a=\frac{m_1+m_2-m_0}{m_1+m_2+m_0}g.$$

Так как $T_1 = \varkappa_1 x_1'$, $T_2 = \varkappa_2 x_2'$, где x_1' и x_2' — удлинение пружин при последовательном соединении грузов, то общее удлинение пружин $x = x_1' + x_2' = T_1/\varkappa_1 + T_2/\varkappa_2$. Окончательно

$$◀ \ x = \frac{(m_0+m_1)(m_1+m_2)x_1 + (m_0+m_2)m_1x_2}{m_1(m_0+m_1+m_2)} \ ▶.$$

1.36. Пусть не соскользнула часть каната длины x, тогда соскользнувшая часть каната имеет длину $l-x$. Обозначим массу каната буквой m.

Запишем второй закон Ньютона для всего каната и для его висящей части:

$$ma = mg\left(1-\frac{x}{l}\right), \quad m\left(1-\frac{x}{l}\right)a = m\left(1-\frac{x}{l}\right)g - T.$$

Отсюда

$$T = mg\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Исследуем это выражение на максимум:

$$z^2 - z + a = 0, \quad \text{где} \quad z = x/l, \quad a = T/mg.$$

Максимум будет при $z = 1/2$, тогда $T_{max} = mg/4$. По условию задачи, чтобы канат не порвался, должно быть

$$T \leqslant T_0 = mgl_0/l.$$

Поэтому, положив $T_{max} = mg/4 \leqslant mgl_0/l$, мы получаем условие целостности каната:

$$\frac{mg}{4} \leqslant mg\frac{l_0}{l}, \quad ◀ \ l_{max} = 4l_0 \ ▶.$$

1.37. Импульсы, передаваемые призме ударами шариков, перпендикулярны поверхности, а их горизонтальные составляющие на одной и той же высоте по обе стороны равны. Однако число шариков, упавших одновременно слева и справа, пропорционально площади проекции грани на горизонтальную поверхность. Следовательно, сила слева, где угол меньше, будет больше, чем справа, и призма поедет в сторону большего угла, то есть в данном случае ◀ направо ▶.

1.38. Скорость шарика при падении с высоты h равна $v = \sqrt{2gh}$, а средняя сила удара n шариков о поршень

$$F_{\text{средн}} = \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{\text{средн}} = 2mvn_t.$$

Таким образом,

$$◀ \ p = p_0 + (Mg + 2\sqrt{2gh}\,mn_t)/S \ ▶.$$

§ 3. Вращательное движение. Колебания

1.39. Частота возникновения той ситуации, когда Солнце, Земля и Марс оказываются на одной прямой, определяется разницей частот обращения этих планет вокруг Солнца:

$$\nu=\frac{1}{T_З}-\frac{1}{T_М}=\frac{T_М-T_З}{T_З T_М}.$$

В земных годах время наступления таких событий

$$t=\frac{1}{\nu}=\frac{T_З T_М}{T_М-T_З}.$$

Число t не целое. Чтобы узнать, через сколько лет повторится великое противостояние, нужно выяснить, сколько раз в t содержится его отличие от целого числа $t-[t]$. Это и дает ответ:

$$◀ \ \frac{t}{t-[t]}\approx\frac{687}{45}\approx 16 \text{ лет} \ ▶.$$

В действительности великие противостояния Марса наблюдаются каждые 15 или 17 лет.

1.40. По второму закону Ньютона

$$m\omega^2 r=N+mg\sin\alpha,$$

где N — сила нормального давления. Чтобы не было проскальзывания, должно выполняться условие

$$mg\cos\alpha\leqslant k\,(m\omega^2 r-mg\sin\alpha),$$

где

$$k=1, \quad \omega^2\geqslant\frac{g}{r}(\cos\alpha+\sin\alpha).$$

Таким образом,

$$◀ \ \omega_{\min}=\left(\frac{\sqrt{2}g}{r}\right)^{1/2} \ ▶.$$

1.41. $◀ \ \omega=\left(\frac{g}{l}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha\pm\sin\beta}\right)^{1/2} \ ▶$. Разные знаки в знаменателе соответствуют конфигурациям маятника, приведенным на рис. О.1.41.

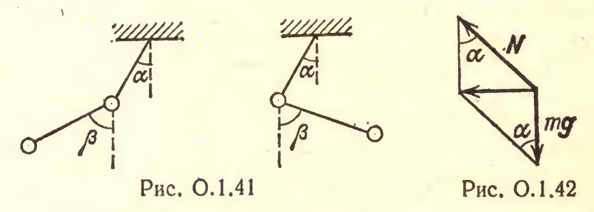


Рис. О.1.41 Рис. О.1.42

1.42. Сила тяжести mg и сила нормального давления N создают результирующую горизонтальную силу $mg\operatorname{tg}\alpha$, являющуюся центростремительной (рис. О.1.42):

$$mv^2/r=mg\operatorname{tg}\alpha, \quad ◀ \ v=\sqrt{rg\operatorname{tg}\alpha} \ ▶.$$

1.43. Угол вылета молота равен 45°. Примем, что $n \gg 1$. Второй закон Ньютона дает $v^2/l = ng$. Отсюда

$$◀ \; L_{max} = v^2/g = nl \; ▶.$$

1.44. По второму закону Ньютона $m\omega^2(l+x) = 2\varkappa x$;

$$◀ \; x = m\omega^2 l/(2\varkappa - m\omega^2) \; ▶.$$

При $2\varkappa < m\omega^2$ равновесие неустойчиво, при $2\varkappa > m\omega^2$ — устойчиво.

1.45. ◀ $T_1 = m_1\omega^2 l_1, \quad T_2 = (m_1 l_1 + m_2 l_2)\omega^2$ ▶.

1.46. Векторная сумма силы натяжения $\boldsymbol{T}$ веревочки и силы сопротивления воздуха $\boldsymbol{F}$ направлена по радиусу r_2 (рис. О.1.46) и равна по модулю $m\omega^2 r_2$, сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна радиусу r_2. Таким образом,

$$m\omega^2 r_2 = T \cos\alpha.$$

Из $\triangle AOB$ по теореме косинусов $r_1^2 = r_2^2 + l^2 - 2r_2 \, l \cos\alpha$. Таким образом,

$$◀ \; T = \frac{2mr_2^2 l\omega^2}{r_2^2 + l^2 - r_1^2} \; ▶.$$

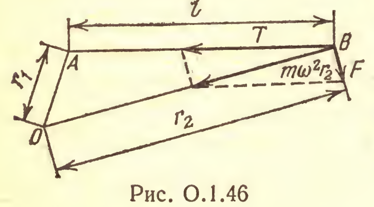


Рис. О.1.46

1.47. Можно считать, что тела участвуют в двух движениях: во вращении вокруг центра масс системы и в поступательном движении вместе с центром масс. Положение центра масс относительно тела массы m_1 находим из уравнения

$$x_1(m_1 + m_2) = m_2 l.$$

Отсюда

$$x_1 = l\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Второе тело находится от центра масс на расстоянии $x_2 = l - x_1$. Так как суммарная скорость тела массы m_2 равна v, а скорость тела массы m_1 равна нулю, то имеем систему уравнений

$$v_{ц.\,м} + \omega x_2 = v, \quad v_{ц.\,м} - \omega x_1 = 0, \quad x_2 m_2 = x_1 m_1,$$

где ω — угловая скорость вращения, а $v_{ц.\,м}$ — скорость центра масс. Отсюда

$$v_{ц.\,м} = v\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Сила натяжения $T = m_1 v_{ц.\,м}^2 / x_1$. Окончательно

$$◀ \; T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v^2}{l} \; ▶.$$

Нельзя вычислять $v_{ц.\,м}$, исходя из того, что для данного момента времени скорости всех точек системы можно рассматривать как скорости, возникшие в результате вращения вокруг тела массы m_1 (это неверно по отношению к ускорениям, а значит, и к силам).

Можно было бы решить задачу, перейдя в систему центра масс, инерциальную в данном случае, где в отсутствие внешних горизонтальных сил центр масс будет покоиться. В этой системе сила натяжения T обусловливает вращательное движение каждого из тел вокруг центра масс. Скорость каждого тела легко вычисляется. Если известны скорость, масса и радиус вращения, можно найти силу T.

1.48. Из условия равновесия нижнего шара

$$N_x = T\cos\alpha.$$

Верхний шар движется по окружности радиуса l, поэтому

$$mv^2/l = mg\sin\alpha - T.$$

Из закона сохранения энергии

$$mgl = mv^2/2 + mgl\sin\alpha.$$

Отсюда

$$◀\ N_x = m(g\cos\alpha)(3\sin\alpha - 2)\ ▶.$$

1.49. Угловая скорость вращения звезд

$$\omega_1 = \sqrt{2GM/r^3},$$

угловая скорость вращения планеты

$$\omega_2 = \sqrt{2GM/x^3}.$$

Приравнивая их, получаем ◀ $x = r$ ▶. Условиям задачи удовлетворяет также еще один ответ: ◀ $x = r/2$ ▶, соответствующий случаю, когда планета находится в точке, вокруг которой обращаются обе звезды.

1.50. Звезды движутся по окружностям радиуса r_1 и r_2. Эти окружности имеют общий центр — центр масс. Расстояние между звездами равно $r_1 + r_2$. Таким образом,

$$\frac{m_{1,2}v_{1,2}^2}{r_{1,2}} = G\frac{m_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \qquad r_{1,2} = \frac{v_{1,2}}{\omega} = \frac{T}{2\pi}v_{1,2}.$$

Отсюда

$$◀\ r_1 + r_2 = \frac{T}{2\pi}(v_1 + v_2),$$

$$m_1 = \frac{Tv_2}{2\pi G}(v_1+v_2)^2, \quad m_2 = \frac{Tv_1}{2\pi G}(v_1+v_2)^2\ ▶.$$

1.51. Разложим силу тяги $\boldsymbol{F}$ двигателя на составляющие, направленные вдоль ($\boldsymbol{F}_\parallel$) и перпендикулярно ($\boldsymbol{F}_\perp$) касательной к окружности, описываемой при движении спутником. Сила гравитационного притяжения Земли, действующая на спутник на расстоянии $r = h + r_З$:

$$F_{гр} = mgr_З^2/r^2.$$

Второй закон Ньютона для спутника в выбранных направлениях осей системы координат дает

$$F_\perp - F_{гр}\sin\alpha = 0, \qquad F_{гр}\cos\alpha - F_\parallel = \frac{mv^2}{r\cos\alpha}.$$

Из условия задачи период обращения

$$T=\frac{2\pi r}{v}\cos\alpha=1 \text{ сут},$$

поэтому

$$F_{\parallel}=F_{\text{гр}}\cos\alpha-\frac{mv^2}{r\cos\alpha}=m\left(g\frac{r_3^2}{r^2}-\frac{4\pi^2 r}{T^2}\right)\cos\alpha=0.$$

Таким образом,

$$◀\ F_{\perp}=mg\frac{r_3^2}{(r_3+h)^2}\sin\alpha\approx 0{,}02mg\approx 200\text{ Н}\ ▶.$$

1.52. ◀ $h_{\max}=2mg/\varkappa$ ▶.

1.53. В выражение для периода колебаний вместо ускорения свободного падения g войдет лишь его составляющая $g'=g\cos\alpha$, так как составляющая силы тяжести, действующая вдоль стержня, компенсируется силой упругости, а в качестве длины маятника войдет некоторая «эффективная» длина $l'=l\sin\beta$:

$$◀\ T=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l\sin\beta}{g\cos\alpha}}\ ▶.$$

1.54. Маятник начинает колебаться относительно точки подвеса с периодом $T=2\pi\sqrt{l/g}$ и начальной скоростью $\boldsymbol{v}$. Начальная скорость относительно земли равна нулю. Остановить подвес так, чтобы и маятник мгновенно остановился, можно в тот момент, когда скорость маятника относительно земли равна нулю (маятник при этом проходит положение равновесия). Такая ситуация будет иметь место через промежуток времени $nT=x/v$, где n — натуральное число. Отсюда

$$◀\ v=\frac{x}{nT}=\frac{x}{2\pi n}\sqrt{\frac{g}{l}}\ ▶.$$

§ 4. Законы сохранения энергии и импульса. Работа. Мощность

1.55. Используя закон сохранения энергии и второй закон Ньютона, получаем

$$\frac{mv^2}{2}=mgx,\quad \frac{mv^2}{(l-x)}=T-mg.$$

Таким образом,

$$◀\ x_{\min}=l\frac{T-mg}{T+mg}\quad \text{при}\quad T\geqslant mg\ ▶.$$

1.56. Скорость шарика при подлете к ракетке $v=\sqrt{2gh}$, а при отлете от нее $v'=\sqrt{2ghn}=v\sqrt{n}$. Так как удар упругий, то в системе отсчета, движущейся со скоростью ракетки u, шарик отско-

чит вверх со скоростью $v+u$, а относительно земли — со скоростью

$$v'=(v+u)+u=v+2u=\sqrt{n}\,v.$$

Отсюда ◀ $u=\sqrt{gh/2}\,(\sqrt{n}-1)$ ▶.

1.57. Угол наклона витка спирали к горизонту равен α, причем

$$\sin\alpha=\frac{h_0}{(h_0^2+4\pi^2r^2)^{1/2}}.$$

Из закона сохранения энергии $mv^2/2=mgh$. Сила, с которой бусинка действует на спираль, $F=\sqrt{F_{\text{центр}}^2+F_{\text{норм}}^2}$, где

$$F_{\text{центр}}=\frac{mv_{\text{гор}}^2}{r}=\frac{mv^2h_0^2}{(h_0^2+4\pi^2r^2)r},$$

$$F_{\text{норм}}=mg\cos\alpha=mg\frac{2\pi r}{\sqrt{h_0^2+4\pi^2r^2}};$$

$$◀\quad F=\frac{mg}{1+(h_0/2\pi r)^2}\left[1+\left(\frac{h_0}{2\pi r}\right)^2+\left(\frac{2h}{r}\right)^2\right]^{1/2}\quad ▶.$$

1.58. В момент удара скорости грузов равны. Один из грузов опустился на высоту h, а другой поднялся на такую же высоту. Закон сохранения энергии дает

$$\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}=m_1gh-m_2gh.$$

В тепло перейдет энергия $W=m_1v^2/2$. Таким образом, количество теплоты

$$◀\quad Q=W=m_1gh\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\quad ▶.$$

1.59. Так как брусок свободно плавает, масса вытесненной им воды равна массе бруска m. После перевертывания бруска центр масс вытесненной воды поднялся на высоту $(l-d)/4$. Центр масс бруска остался на уровне поверхности воды, поскольку брусок снова находится в равновесии. По закону сохранения энергии

$$◀\quad Q=mg\,(l-d)/4\approx 4{,}7\cdot10^{-3}\ \text{Дж}\quad ▶.$$

1.60. Введем начальную и конечную (h_1 и h_2) высоту уровня жидкости относительно нижней поверхности плавающей пробки. Пробка, упав, свою потенциальную энергию $mg(H+h_1)$ израсходует на подъем воды, $m_0g(h_2-h_1)/2$, и на выделение некоторого количества теплоты Q. Следовательно,

$$Q=mg\,(H+h_1)-m_0g\,(h_2-h_1)/2,$$

где $m=\rho\pi r^2h$, $m_0=\rho_0\pi\,(R^2-r^2)h_2$.

Условие плавания пробки имеет вид

$$\rho h=\rho_0h_2.$$

Условие вытеснения пробкой части воды в сосуде:

$$h_1 \pi R^2 = h_2 \pi (R^2 - r^2).$$

Отсюда

$$◀ \quad Q = \rho g h \pi r^2 \left[H + \frac{\rho}{2\rho_0} h \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \quad ▶.$$

1.61. ◀ $A = \rho_0 g h^3 (H - h/2)$ ▶.

1.62. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга, описывается формулой

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r},$$

где отличие от выражения для кулоновской силы

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

только в показателе степени r. Используя аналогию между законом Кулона и законом всемирного тяготения $F = G m_1 m_2 / r^2$, запишем выражение для потенциальной энергии двух притягивающихся (поэтому появляется знак «—») точечных масс:

$$W = -G m_1 m_2 / r.$$

Вне шара поле сил тяжести таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре шара. Поэтому для тела, находящегося на поверхности шара или очень близко к ней, в качестве r надо брать радиус шара.

Для земного шара у его поверхности имеем

$$W_0 = -G m M_З / r_З.$$

В то же время сила тяжести на поверхности Земли $mg = G m M_З / r_З^2$. Отсюда $G M_З = g r_З^2$. Подставляя полученное для $G M_З$ выражение в формулу для W_0, получаем

$$W_0 = -m g r_З.$$

Если речь идет о Луне, то вместо $r_З$ надо взять радиус Луны $r_Л$, и ускорение свободного падения на Луне $g_Л = g/6$. Таким образом, для Луны получаем

$$W_0 = -m g r_Л / 6.$$

В момент начала движения корабля к Луне его кинетическая энергия по условиям задачи равна нулю, в нуль обращается и потенциальная энергия из-за большого расстояния r до центра Луны. В момент включения двигателя кинетическая энергия корабля равна $mv^2/2$, а потенциальная равна $-m g r_Л / 6$. Закон сохранения энергии дает

$$0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{m g r_Л}{6},$$

откуда $v^2=r_Л g/3$. Считая $a=5g$ (влиянием добавки к ускорению, равной $-g/6$, можно пренебречь), из кинематических соотношений для равноускоренного движения с начальной скоростью v получаем $v^2=2ah=10gh$. Подставляя выражение для v^2, имеем $r_Л g/3=10\,gh$, откуда ◀ $h=r_Л/30\approx 60$ км ▶.

1.63. Скорость тела должна быть такова, чтобы запаса кинетической энергии хватило для полета до той точки пространства, в которой силы притяжения тела Землей и Луной равны. Равенство сил определяет расстояние x от указанной точки до центра Земли:

$$\frac{GmM_З}{x^2}=\frac{GmM_Л}{(l-x)^2}, \quad \text{или} \quad n\,(l-x)^2=x^2,$$

где $n=M_З/M_Л$. Отсюда

$$x=\frac{\sqrt{n}\,l}{\sqrt{n}+1}.$$

Закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv_З^2}{2}-\frac{GmM_З}{r_З}-\frac{GmM_Л}{l-r_З}=-\frac{GmM_З}{x}-\frac{GmM_Л}{l-x},$$

или

$$v_З^2=2gr_З+\frac{2gr_З}{n\,(l-r_З)}-\frac{2gr_З}{x}-\frac{2gr_З^2}{n\,(l-x)}.$$

Подставляя x, получаем

$$◀ \quad v_З^2=2gr_З\left[1+\frac{r_З}{n\,(l-r_З)}-\frac{r_З\,(\sqrt{n}+1)^2}{nl}\right] \quad ▶.$$

Слишком грубой оценкой при заданной постановке задачи была бы вторая космическая скорость $v_2=\sqrt{2gr_З}$ (см. дополнительные слагаемые в ответе). Очень грубой ошибкой была бы также запись потенциальной энергии в виде $W_п=mgh$, а не $W_п=-GmM_З/r$ (см. решение задачи 1.62).

1.64. Запишем закон сохранения энергии, сразу учитывая скорость тела относительно Земли и его потенциальную энергию, в виде (см. решение задачи 1.62)

$$\frac{m\,(v_0+v_З)^2}{2}-mgR_З=\frac{mv^2}{2}, \qquad \frac{m\,(v_0-v_З)^2}{2}-mgR_З=0,$$

где $v_З=l/T$. Отсюда

$$v=2\left[v_З\left(v_З+\sqrt{2gR_З}\right)\right]^{1/2}=2\frac{l}{T}\left(\frac{l}{T}+\sqrt{2gR_З}\right)\Big]^{1/2}.$$

Так как $R_З=l/2\pi$, то ◀ $v=4{,}6$ км/с ▶.

1.65. Минимальная скорость прохождения петли достигается, когда центр масс части каната, имеющей массу $m'=m\cdot 2\pi r/l$,

оказывается поднятым на высоту r: $mv_{min}^2/2=m'gr$. Отсюда ◀ $v_{min}=2r\sqrt{\pi g/l}$ ▶.

1.66. Из закона сохранения энергии получаем

$$\varkappa(l-l_0)^2/2=2mv^2/2.$$

Скорость v_x бусинок вдоль оси x равна $v\cos\alpha$. Таким образом,

$$◀\ v_x=(l-l_0)\sqrt{\frac{\varkappa}{2m}}\cos\alpha\ ▶.$$

1.67. Используя закон Гука и закон сохранения энергии, получаем

$$\varkappa_1 x=\varkappa_2(l-x),\quad \varkappa_2\frac{l^2}{2}=m\frac{v_{max}^2}{2}+\varkappa_1\frac{x^2}{2}+\varkappa_2\frac{(l-x)^2}{2},$$

где x — координата нового положения равновесия, в котором скорость максимальна.

$$◀\ v_{max}=\frac{\varkappa_2 l}{[m(\varkappa_1+\varkappa_2)]^{1/2}}\ ▶.$$

1.68. Пусть каждый шарик прошел до остановки путь l, тогда закон сохранения энергии дает

$$2\cdot\frac{mv_0^2}{2}=2kmgl.$$

Число оборотов

$$n=\frac{l}{\pi l_0},\quad ◀\ n=\frac{v_0^2}{2\pi kgl_0}\ ▶.$$

1.69. Закон сохранения энергии дает

$$mgH=\frac{H}{\sin\alpha_1}k_1mg\cos\alpha_1+\frac{h}{\sin\alpha_2}k_2mg\cos\alpha+mgh.$$

Окончательно

$$◀\ h=H\frac{1-k_1\operatorname{ctg}\alpha_1}{1+k_2\operatorname{ctg}\alpha_2}\ ▶.$$

1.70. Пусть x_1 — смещение правого тела влево, а x_2 — его смещение вправо от начального положения левого тела. Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{\varkappa x_1^2}{2}+kmgx_1,\quad \frac{\varkappa x_1^2}{2}=\frac{\varkappa x_2^2}{2}+kmg(x_1+x_2).$$

Требование сдвига левого тела дает условие $\varkappa x_2=kmg$. Решая систему трех уравнений, получаем $x_1=3x_2$ и ◀ $v=kg\sqrt{15m/\varkappa}$ ▶.

1.71. Если брусок массы m_2 остается неподвижным при смещении x бруска массы m_1, то сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения:

$$Fx=\frac{\varkappa x^2}{2}+km_1gx,\quad \text{то есть}\quad F=\frac{\varkappa x}{2}+km_1g,$$

где $\varkappa$ — жесткость пружины.

Уравнение движения второго бруска:

$$m_2 a_2 = \varkappa x - k m_2 g.$$

Брусок массы m_2 сдвинется при условии $a_2 > 0$, то есть при условии $\varkappa x > k m_2 g$. Минимальное значение $F_{\min}$ получим, если положим $\varkappa x = k m_2 g$. Таким образом,

$$◀ \; F_{\min} = kg\,(m_1 + m_2/2) \; ▶.$$

1.72. Масса воды, выходящей в единицу времени из брандспойта, равна $\rho_0 v S$. Мощность, передаваемая насосом выбрасываемой воде, удовлетворяет соотношению

$$\eta P = \rho_0 S v \frac{v^2}{2}.$$

Из кинематических соображений имеем

$$l = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Окончательно

$$◀ \; \sin 2\alpha = lg \left(\frac{\rho_0 S}{2\eta P} \right)^{2/3} \; ▶.$$

1.73. Вначале колеса проскальзывают и часть мощности двигателя затрачивается на работу против сил трения. Сила тяги в этот период равна силе трения $f = kmg$, т. е. ускорение автомобиля $a = kg$ и ◀ $v = at = gkt$ ▶. Как только проскальзывание прекратится, вся мощность двигателя пойдет на разгон автомобиля. Критическая скорость

$$v_{\text{кр}} = \frac{P}{f} = \frac{P}{kmg}.$$

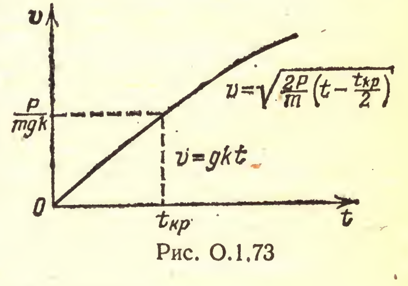


Рис. О.1.73

Время достижения критической скорости

$$t_{\text{кр}} = \frac{v_{\text{кр}}}{a} = \frac{P}{mg^2k^2}.$$

Дальнейшая скорость определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{\text{кр}}^2}{2} + P\,(t - t_{\text{кр}}),$$

где время t отсчитывается от начала движения. Это уравнение удовлетворяется, начиная с момента $t - t_{\text{кр}}$ (рис. О.1.73):

$$◀ \; v = \sqrt{\frac{2P}{m}\left(t - \frac{P}{2mg^2k^2}\right)} \quad \text{для} \quad t > t_{\text{кр}} = \frac{P}{mg^2k^2} \; ▶.$$

1.74. Пусть v' — скорость пули после пролета сквозь первый груз, u_1 — скорость первого груза после пролета сквозь него пули,

u_2 — скорость второго груза. Скорость пули после попадания ее во второй груз $v''=u_2$. Из закона сохранения импульса:

$$mv=mu_1+mv', \quad mv'=2mu_2.$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv'^2}{2}+\frac{mu_1^2}{2}+Q_1, \quad \frac{mv'^2}{2}=\frac{2mu_2^2}{2}+Q_2.$$

Таким образом,

$$◀ \quad Q_1=mv'(v-v')=2m\left(\frac{v^2}{2}-\frac{Q_2}{m}\right)^{1/2}\left[v-2\left(\frac{v^2}{2}-\frac{Q_2}{m}\right)^{1/2}\right] ▶.$$

1.75. Пусть l_0 — расстояние от пушки до лагеря, а v_0 — начальная скорость ядра массы m. Введем массу барона M и скорость v ядра вместе с бароном. Тогда, используя закон сохранения импульса и выражение для расстояний l_0 и l, получающихся для тела, брошенного под углом α к горизонту в поле силы тяжести, получаем

$$mv_0=(M+m)v, \quad l_0=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \quad l=\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha;$$

$$l=\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha,$$

$$◀ \quad \frac{l_0-l}{l_0}=1-\left(\frac{m}{M+m}\right)^2=\frac{1+2m/M}{(1+m/M)^2}=\frac{35}{36} ▶.$$

1.76. $◀ \quad x=\dfrac{m_2 v}{m_1+m_2}\sqrt{\dfrac{g}{2h}} ▶.$

1.77. Закон сохранения импульса дает

$$(m_1+m_2)u=m_2 v, \quad ◀ \quad v=u(1+m_1/m_2) ▶.$$

1.78. На основании второго закона Ньютона, записанного в виде $F=\Delta p/\Delta t$, имеем

$$\Delta p=F_{\text{ср}}\cdot 2\tau=(F_0/2)\,2\tau=F_0\tau.$$

Из условия линейности зависимости силы от времени следует, что $F_{\text{ср}}=F_0/2$ (аналогично, например, при выводе выражения для энергии сжатой пружины используется линейность закона Гука).

Изменения импульса каждого из шариков в проекциях на начальное направление полета:

$$m_1 v_1=F_0\tau, \quad m_2 v_2-m_2 v=-F_0\tau.$$

Отсюда

$$◀ \quad v_1=F_0\tau/m_1, \quad v_2=v-F_0\tau/m_2 ▶.$$

Зная конечные и начальные скорости и массы, находим энергию, перешедшую в тепло:

$$Q=\frac{m_2 v^2}{2}-\frac{m_2 v_2^2}{2}-\frac{m_1 v_1^2}{2}; \quad ◀ \quad Q=vF_0\tau-\frac{F_0^2\tau^2}{2}\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} ▶.$$

1.79. По закону сохранения импульса

$$[m-(\Delta m_1+\Delta m_2)+M]\,u=(\Delta m_1-\Delta m_2)\,v'=$$
$$=\frac{m}{2}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\,v\cos\alpha,$$

где $\alpha\approx\alpha_1\approx\alpha_2$; Δm_1, Δm_2 — массы осколков, вылетевших в соответствующие отверстия в сфере, u — искомая скорость сферы и прилипших к ней осколков после взрыва. Доля вылетевших осколков от всей массы m пропорциональна площади отверстия $S_{1,2}=2\pi rh_{1,2}=$ $=2\pi r^2(1-\cos\alpha_{1,2})$:

$$\Delta m_1+\Delta m_2=\frac{m}{2}(2-\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)\approx m-m\cos\alpha.$$

Окончательно

$$◀\ u=\frac{mv\cos\alpha\,(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)}{2\,(m\cos\alpha+M)}\ ▶.$$

1.80. Скорость сближения шарика с короткой стороной рамки останется после предыдущего соударения с рамкой той же самой по модулю. Это легко понять, рассмотрев соударение, например, в системе центра масс, где после упругого удара модули импульсов тел не изменяются и, следовательно, не меняются модули скоростей, а направления переходят в противоположные. При рассмотрении движения в лабораторной системе с привлечением законов сохранения энергии и импульса после сравнительно длинных выкладок, получается, естественно, тот же результат. Таким образом, ◀ $t=$ $=2l/v$ ▶.

1.81. С учетом закона сохранения импульса при ударе

$$m_1v-m_2v=(m_1+m_2)\,u$$

и закона сохранения энергии до и после удара, из которого следуют соотношения $v=\sqrt{2gh}$ и $u=\sqrt{2gH}$, имеем

$$◀\ h=\frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}H\ ▶.$$

1.82. Законы сохранения энергии и импульса дают

$$Mu^2/2=2mv^2/2,\quad Mu=2mv\sqrt{3}/2,\quad ◀\ M=3m/2\ ▶.$$

1.83. Угол разлета покоящихся шаров равен 60° (удар упругий, трения нет, шары взаимодействуют вдоль прямой, соединяющей их центры). Обозначим проекцию скорости каждого из этих шаров на направление вектора $\boldsymbol{u}$ через v_{ix}. Из законов сохранения энергии и импульса имеем

$$\frac{mu^2}{2}=\frac{2mv_i^2}{2}+\frac{mu'^2}{2},\quad mu=2mv_{ix}+mu',\quad v_{ix}=u\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где $i=1$, 2 — номер шара. Отсюда

$$◀\ v_i=\frac{2\sqrt{3}}{5}u,\quad u'=-\frac{1}{5}u\ ▶.$$

1.84. Запишем для первого соударения законы сохранения:

$$2mu=2mu'+mv_1,\quad 2\frac{mu^2}{2}=2\frac{mu'^2}{2}+\frac{mv_1^2}{2}.$$

Отсюда $v_1=4u/3$, причем существенно лишь соотношение масс соударяющихся шаров, а не сами массы. Это же соотношение справедливо и для последующих ударов. Значит, и для последующих ударов $v_n=4v_{n-1}/3$. Таким образом, можно выразить скорость последнего шара через u:

$$◀\ v_{1969}=(4/3)^{1969}\,u\ ▶.$$

1.85. Обозначим через $v_\perp$ проекции скоростей шаров на направление, перпендикулярное направлению движения доски, и через v скорость доски сразу после удара. Из законов сохранения энергии и импульса имеем

$$\frac{Mu^2}{2}=(2m+M)\frac{v^2}{2}+2m\frac{v_\perp^2}{2},\quad Mu=(2m+M)\,v.$$

Отсюда

$$v_\perp=\frac{u}{\sqrt{1+2m/M}},\ ◀\ v_\perp=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{м/с}\approx 0{,}6\ \text{м/с}\ ▶.$$

1.86. До момента достижения шариком нижней точки выемки брусок стоит; скорость шарика в этой точке

$$v=\sqrt{2g\,(h+r)}.$$

При достижении точки B из требования максимальности высоты и из закона сохранения импульса и энергии в верхней точке подъема

$$v_{\text{верт}}=0,\quad (M+m)\,v_{\text{гор}}=m\sqrt{2g\,(h+r)},\quad mgh=\frac{(M+m)\,v_{\text{гор}}^2}{2}.$$

Отсюда ◀ $h_{\max}=rm/M=4$ см ▶.

1.87. Потенциальная энергия воды за счет уменьшения высоты ее центра масс на Δh уменьшится на величину ΔW, перейдя в кинетическую энергию тележки и воды:

$$\Delta W=mg\,\Delta h=\frac{mg}{4}\,l\cos\alpha=\frac{Mu^2}{2}+\frac{m}{2}\left(v_{0\ \text{гор}}^2+v_{0\ \text{верт}}^2\right).$$

Так как относительно тележки вода движется под углом α к вертикали со скоростью $\boldsymbol{v}$, а тележка движется со скоростью $\boldsymbol{u}$, то горизонтальная составляющая скорости воды относительно земли $v_{0\ \text{гор}}=v\sin\alpha-u$, а вертикальная $v_{0\ \text{верт}}=u\cos\alpha$.

В соответствии с законом сохранения импульса

$$m\,(v\sin\alpha-u)=Mu.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{m}{2}\left[(v\sin\alpha-u)^2+(v\cos\alpha)^2\right]+\frac{Mu^2}{2}=\frac{mg}{4}\,l\cos\alpha.$$

$$◀\ u=\frac{m}{M}\left(\frac{gl\cos\alpha}{2\,(1+m/M)\,[1+(1+m/M)\operatorname{ctg}\alpha]}\right)^{1/2}\ ▶.$$

1.88. Так как нить нерастяжима, то заданное соотношение скоростей для концов нити возможно лишь при условии, что скорость трубки относительно стола $u=v/2$ и направлена в ту же сторону, что и скорость половины нити с концом в точке A, то есть влево. Из законов сохранения импульса и энергии имеем

$$M\frac{v}{2}+\frac{m}{2}v=mv'+Mu', \qquad \frac{Mv^2}{8}+\frac{mv^2}{4}=\frac{mv'^2}{2}+\frac{Mu'^2}{2}.$$

В системе отсчета, в начальный момент движущейся вместе с трубкой, уравнения выглядят проще:

$$\frac{mv^2}{8}=\frac{Mu''^2}{2}+\frac{mv''^2}{2}, \qquad 0=Mu''+mv'', \qquad u'=u''+\frac{v}{2},$$

$$◀ \; u'=\frac{v}{2}\left(1-\frac{m}{\sqrt{(m+M)M}}\right) \; ▶.$$

1.89. Средняя сила удара одного шарика о поршень

$$F_{\text{ср}}=\frac{\Delta p}{\Delta t}, \qquad \Delta p=2mv=2m\sqrt{2g(H-h)};$$

в среднем один шарик передает импульс Δp поршню за время $\Delta t=2\tau$, где τ находим из уравнения $h=v\tau+g\tau^2/2$. Таким образом,

$$Mg=nF_{\text{ср}}=\frac{nmg}{(1-h/H)^{-1/2}-1}.$$

Отсюда

$$◀ \; H=\frac{(mn+M)^2}{mn(mn+2M)}h \; ▶.$$

1.90. Введем горизонтальную и вертикальную составляющие ускорения бруска $a_{\text{гор}}$ и $a_{\text{верт}}$. На брусок действуют сила тяжести mg и сила нормального давления N со стороны клина. На клин в направлении горизонтали действует лишь горизонтальная составляющая силы нормального давления со стороны бруска N. Учитывая это, можно записать второй закон Ньютона для горизонтального движения клина и бруска и вертикального движения бруска:

$$Ma=N\sin\alpha, \qquad ma_{\text{гор}}=N\sin\alpha, \qquad ma_{\text{верт}}=mg-N\cos\alpha.$$

Проекции ускорений бруска и клина здесь записаны в системе отсчета, связанной с горизонтальной плоскостью; при этом направление ускорения бруска не совпадает с направлением вдоль наклонной плоскости, так как сама плоскость движется с ускорением a. Если перейти в систему отсчета, связанную с клином, то здесь ускорение клина равно нулю, а ускорение бруска будет направлено под углом α к горизонту и будет равно по модулю $a_{\text{гор}}+a$. На вертикальную проекцию $a_{\text{верт}}$ переход в новую систему отсчета не окажет влияния. Таким образом, мы можем добавить еще одно необходимое уравнение:

$$\frac{a_{\text{верт}}}{a_{\text{гор}}+a}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Решая совместно систему четырех уравнений, получаем

$$◀ \quad a = g\frac{m \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)} \quad ▶.$$

§ 5. Статика. Момент сил

1.91. ◀ $\angle ABC = \operatorname{arctg}(1/2)$ ▶.

1.92. Учитывая, что линии действия всех трех сил, действующих на шар (сила тяжести, сила натяжения веревки, сила давления со стороны стенки), проходят через центр шара, получаем

$$\frac{N}{mg} = \frac{r}{[(r+l)^2 - r^2]^{1/2}}.$$

Окончательно

$$◀ \quad N = \frac{mgr}{[l(l+2r)]^{1/2}} \quad ▶.$$

Результат можно получить, и сравнивая моменты сил.

1.93. Треугольник, образованный отрезками, изображающими силу натяжения нити T, силу нормального давления N и силу тяжести mg, подобен треугольнику, образованному нитью и радиусами R и r, проведенными к концам нити и точке соприкосновения шаров (рис. О.1.93). Из подобия треугольников получаем

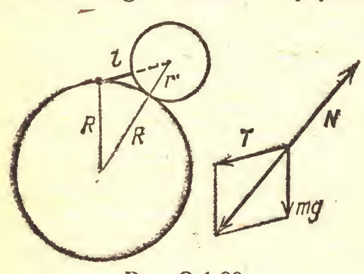


Рис. О.1.93

$$◀ \quad T = mg\frac{l+r}{R} \quad ▶.$$

1.94. 1. Из условия равновесия системы имеем

$$m_1 g \cos(\beta - \alpha) = m_2 g \cos(\beta + \alpha),$$

где угол β определяется условием $\cos\beta = l/2R$. Отсюда

$$\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2} = \frac{\cos(\beta-\alpha)+\cos(\beta+\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{l \operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{4R^2-l^2}}.$$

Окончательно

$$◀ \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\frac{l}{\sqrt{4R^2-l^2}} \quad ▶.$$

К этому же результату приводит условие, что при устойчивом равновесии центр тяжести занимает самое низкое положение:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OO'}{O'C}, \quad OO' = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} - \frac{1}{2}\right)l, \quad O'C = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}},$$

где O — центр тяжести системы тел, O' — геометрический центр стержня, C — геометрический центр сферы.

2. Сила реакции опоры N_A, действующая на точку A стержня, направлена по нормали к сферической поверхности, то есть по радиусу; сила реакции N_B, приложенная к точке B стержня, направлена перпендикулярно стержню (рис. О.1.94). Угол ABO равен α (O — центр сферы), угол AOC равен 2α. Условия равновесия по горизонтали и вертикали:

$$N_A \sin 2\alpha = N_B \cos\alpha = Mg,$$

$$N_A \cos 2\alpha = N_B \sin\alpha,$$

$$◀\ N_A = Mg \operatorname{tg}\alpha,$$

$$N_B = Mg \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\ ▶.$$

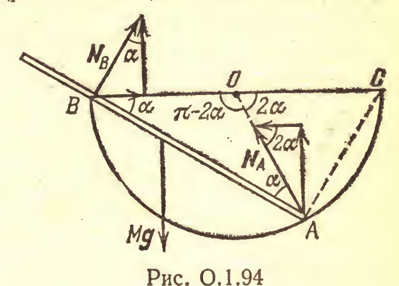


Рис. О.1.94

1.95. ◀ $F = F_0 \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ ▶.

1.96. Рассмотрим силы, действующие на один полуцилиндр, и их моменты относительно линии его соприкосновения с опорой. Так как нить невесома и нет трения, то сила натяжения нити во всех точках по модулю одна и та же и равна силе тяжести, действующей на неизвестный груз массы M. Отсутствие вращения приводит к следующему равенству моментов:

$$mgl + M_{\min} gr = M_{\min} g \cdot 2r.$$

Отсюда ◀ $M_{\min} = ml/r$ ▶.

1.97. Рассмотрим левую половину нити (рис. О.1.97). Сила тяжести $mg/2$ направлена вертикально вниз. Сила натяжения нити

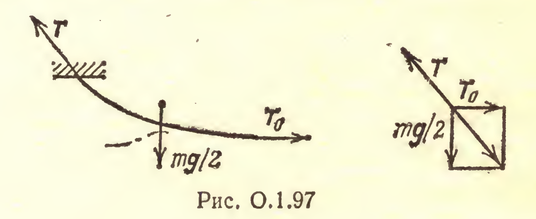


Рис. О.1.97

T_0 в нижней точке направлена по горизонтали. Сила натяжения в точке подвеса

$$◀\ T = \left[\left(\frac{mg}{2}\right)^2 + T_0^2\right]^{1/2}\ ▶.$$

Нить в точке подвеса образует с вертикалью угол, равный ◀ $\alpha = \operatorname{arcctg}(mg/2T_0)$ ▶.

1.98. На бусинку действуют сила тяжести и силы натяжения слева и справа, равные по модулю. Отсюда $\angle ACD = \angle DCB$, $AD = DE = x$, $AC = CE$ (рис. О.1.98). Из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle EBF$

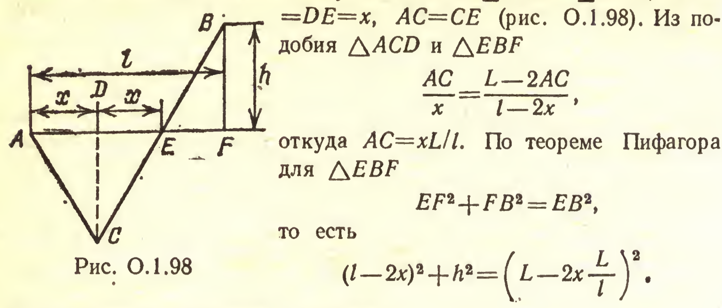


Рис. О.1.98

$$\frac{AC}{x} = \frac{L - 2AC}{l - 2x},$$

откуда $AC = xL/l$. По теореме Пифагора для $\triangle EBF$

$$EF^2 + FB^2 = EB^2,$$

то есть

$$(l - 2x)^2 + h^2 = \left(L - 2x\frac{L}{l}\right)^2.$$

Из последнего уравнения находим

$$◀ \quad x = \frac{1}{2}\left(l - \frac{h}{\sqrt{(L/l)^2 - 1}}\right) \quad ▶.$$

1.99. В системе отсчета, связанной с ракетой,

$$\Delta p = 2mv \sin\alpha, \qquad \Delta p_x = \Delta p \sin\alpha = 2mv \sin^2\alpha,$$

где x — ось ракеты. Масса пылинок, ударяющихся о ракету в единицу времени, $\Delta m/\Delta t = \rho v S$. Таким образом,

$$◀ \quad F_{\text{тяги}} = 2\rho v^2 S \sin^2\alpha \quad ▶.$$

Можно было написать сразу

$$F_{\text{тяги}} = S\rho v\,(v - v\cos 2\alpha) = 2\rho v^2 S \sin^2\alpha.$$

1.100. Число пылинок, ударяющихся о ракету в единицу времени, пропорционально скорости ракеты v, импульс, переданный ракете каждой пылинкой, также пропорционален v. Поэтому

$$F_{\text{тяги}} = F_{\text{сопр}} \backsim v \cdot v = v^2.$$

Следовательно, чтобы $v'/v = 2$, нужно, чтобы ◀ $F'_{\text{тяги}}/F_{\text{тяги}} = 4$ ▶.

1.101. Сила тяжести, действующая на шар, пропорциональна r^3, где r — его радиус; сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости шара и его поперечному сечению, то есть пропорциональна $v^2 r^2$. При установившейся скорости сила сопротивления равна силе тяжести. Отсюда

$$v^2 r^2 \backsim r^3, \quad v^2 \backsim r, \quad v_2/v_1 = \sqrt{r_2/r_1},$$

то есть если $r_2/r_1 = 2$, то ◀ $v_2/v_1 = \sqrt{2}$ ▶.

1.102. Вертикаль, проведенная через точку подвеса, должна пройти через центр тяжести.

Можно решить задачу, и не отыскивая положения центра тяжести, а исходя из того, что моменты силы тяжести половин прута относительно вертикали равны по модулю.

Проведя вычисления, получаем один из эквивалентных ответов:

◀ $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ или $\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$, или $\alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$, или $\alpha=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ ▶.

1.103. Из условия равенства нулю суммарного момента сил относительно оси, проходящей через точку O приложения искомой силы $\boldsymbol{F}_\parallel$, имеем $N=mg/2$, где N — сила реакции опоры. Проецирование силы на ось вдоль стержня дает

$$F_\parallel-mg\sin\alpha+N\sin\alpha=0,\quad \text{то есть} \quad ◀\ F_\parallel=(mg/2)\sin\alpha\ ▶.$$

1.104. Силы реакции опоры $\boldsymbol{N}_{A,B}$, равные по модулю силам, действующим на гвозди A и B, направлены по радиусам из-за отсутствия трения. Условия равновесия по горизонтали и вертикали дают

$$N_A\sin\alpha=N_B\sin\beta,\quad N_A\cos\alpha+N_B\cos\beta=mg.$$

Таким образом,

$$◀\ N_A=mg\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},\ N_B=mg\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\ 0<\beta-\alpha<\pi\ ▶.$$

1.105. Введем угол $\gamma=\pi-\beta$. Тогда

$$N_A\cos\alpha+N_B\cos\gamma=mg,\quad N_A\sin\alpha-N_B\sin\gamma=0,$$

где N_A и N_B — силы, действующие на гвозди A и B:

$$◀\ N_A=mg\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},\quad N_B=mg\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\ \alpha\leqslant\beta\leqslant\pi+\alpha\ ▶.$$

Решение задачи можно провести и другими способами, например, написав условия равенства нулю полного момента сил относительно точки O.

1.106. Запишем равенство моментов сил относительно точки подвеса:

$$m_1g(r-x)=m_2gx.$$

Отсюда найдем плечо x силы тяжести:

$$x=r\frac{m_1}{m_1+m_2},\quad \sin\alpha=\frac{x}{(r+l)}.$$

Таким образом,

$$◀\ \alpha=\arcsin[(1+l/r)(1+m_2/m_1)]^{-1}\ ▶.$$

1.107. Записывая равенство сил натяжения, создаваемых грузами, с учетом того, что эти силы направлены по касательной к поверхности, или равенство моментов сил тяжести относительно вертикали, проходящей через ось цилиндра (моменты сил реакции опоры при этом равны нулю), получаем

$$◀\ \frac{m_1}{m_2}=\frac{\sin(l/r-\alpha)}{\sin\alpha}\ ▶.$$

1.108. $F_2 = nF_1$, $-F_2L + mg(L - l) + MgL/2 = 0$, $-F_1L + mgl + MgL/2 = 0$. ◀ $l = \frac{2m + M(1-n)}{2m(1+n)} L$ ▶.

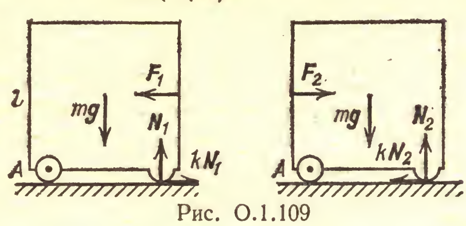


Рис. O.1.109

1.109. Записывая моменты сил относительно точки A (рис. O.1.109), получаем

$$F_1 l/2 + N_1 l - mgl/2 = 0, \quad F_2 l/2 + mgl/2 - N_2 l = 0.$$

Так как $F_1 = kN_1$, $F_2 = kN_2$, то

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{(mg + F_2)}{(mg - F_1)}.$$

Отсюда

$$◀ \; m = \frac{2F_1F_2}{g(F_2 - F_1)} = 60 \text{ кг} \; ▶.$$

1.110. Условие отсутствия проскальзывания:

$$F \cos\alpha \leqslant k(F \sin\alpha + mg).$$

Условие опрокидывания (рис. O.1.110):

$$Fl \cos\alpha \geqslant mgl/2,$$

где $BO = l/2$ — плечо силы тяжести, $OA = l\cos\alpha$ — плечо силы F.

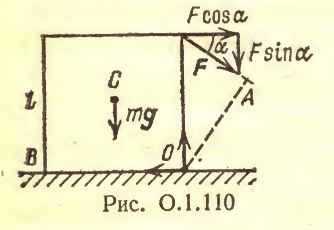


Рис. O.1.110

Отсюда

$$◀ \; F_{\min} = \frac{mg}{2k}\sqrt{(1-k)(3k-1)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-2k}{k}, \quad 1/3 \leqslant k \leqslant 1 \; ▶.$$

1.111. $N_1 + N_2 = mg$, $f_1 + f_2 = F$, $f_1 = k_1N_1$, $f_2 = k_2N_2$, где N_1 и N_2 — силы, действующие на опоры, а f_1 и f_2 — силы трения опор о поверхность стола. Уравнение моментов относительно центра тяжести:

$$(f_1 + f_2)d + (N_1 - N_2)l/2 = 0.$$

Система уравнений дает

$$◀ \; F = \frac{mg(k_1 + k_2)}{2[1 + d(k_1 - k_2)/l]} \; ▶.$$

Уравнение моментов относительно любой из опор, например правой:

$$N_1 l + Fd = mgl/2,$$

естественно, дает тот же результат.

Сложным и непривычным здесь является, видимо, то, что различные части бруска имеют различные коэффициенты трения и, следовательно, действуют различные силы трения, находить которые нужно с помощью условия равенства моментов сил.

1.112. См. решение предыдущей задачи.

$$N_1+N_2=mg\cos\alpha,\quad f_1+f_2=mg\sin\alpha,$$

где $f_1=k_1N_1$, $f_2=k_2N_2$. Уравнение равенства моментов сил относительно центра тяжести:

$$(f_1+f_2)h+(N_2-N_1)l=0.$$

Система уравнений дает для искомого угла

$$◀\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1+k_2}{2+(k_1-k_2)h/l}\ ▶.$$

1.113. Сравнивая моменты сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O' — точку соприкосновения колес с плоскостью, по которой они катятся, имеем

$$f(r+R)=F_{\text{тяг}}R,\quad f=kF.$$

Отсюда $◀\ A=F_{\text{тяг}}l=kFl\left(1+\frac{r}{R}\right)\ ▶.$

1.114. $◀\ k=\frac{R\cos\alpha}{(R\sin\alpha+r)}\ ▶.$

1.115. Запишем равенство моментов сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис. О.1.115):

$$Nl\cos\alpha=mg\frac{l}{2}\cos\alpha-kNl\sin\alpha.$$

Отсюда

$$N=\frac{mg}{2(k\operatorname{tg}\alpha+1)}.$$

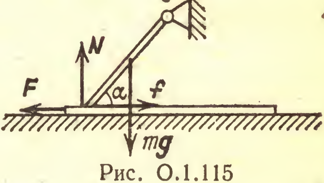


Рис. О.1.115

Чтобы сдвинуть лист, необходимо приложить силу $F>f=kN$. Таким образом,

$$◀\ F_{\min}=\frac{kmg}{2(1+k\operatorname{tg}\alpha)}\ ▶.$$

1.116. Условие равенства моментов дает

$$f(l-h)=N\sqrt{l^2-(l-h)^2}=N\sqrt{h(2l-h)},$$

где N — сила нормального давления, а f — сила трения. Брусок не может двигаться при

$$f\leqslant kN=f\frac{(l-h)}{\sqrt{h(2l-h)}}.$$

Отсюда

$$h^2-2lh+\frac{k^2l^2}{(1+k^2)}\geqslant 0,\quad h=l\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Знак «+» не годится, так как $h < l$.

$$◀ \quad 0 < h \leqslant l\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) \quad ▶.$$

1.117. Пусть T — сила натяжения троса (рис. О.1.117). Из условия равенства моментов сил относительно точки O соприкосновения подпорки с землей получаем $TH = hF \operatorname{tg} \alpha$.

Рис. О.1.117

По условию вертикальная сила, с которой можно вытянуть столб при наличии подпорки и троса, $F < F_0$. Следовательно,

$$T < \frac{h}{H} F_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом,

$$◀ \quad T_{\max} = \frac{h}{H} F_0 \operatorname{tg} \alpha \quad ▶.$$

1.118. Максимальная нагрузка на стержни и, следовательно, максимальная разность сил $N_2 - N_1$, действующих на опоры перекладины, будет тогда, когда брусок находится в нижнем положении. В этом положении сила натяжения каждого стержня равна T_1 и T_2 соответственно. Запишем равенство сил, моментов сил, второй закон Ньютона для движения бруска по окружности и закон сохранения энергии (длину каждого стержня примем равной r):

$$N_1 + N_2 - T_1 - T_2 = 0, \quad N_1 L - T_1 (d + l) - T_2 d = 0,$$

$$\frac{mv^2}{r} = T_1 + T_2 - mg, \quad \frac{mv^2}{2} = mg \cdot 2r.$$

Отсюда получаем ◀ $N_2 - N_1 = 5mg\left(1 - \frac{l+2d}{L}\right)$ ▶.

1.119. Условие поворота:

$$Mg\,(L-d)^2/2L \leqslant Mgd^2/2L + Td,$$

где сила T определяется из второго закона Ньютона для вращательного движения:

$$mv^2/l = T - mg, \quad mgl\,(1-\cos\alpha) = mv^2/2.$$

Таким образом,

$$◀ \quad 1 \geqslant \cos\alpha \geqslant \frac{3}{2} - \frac{M}{2m}\left(\frac{L}{2d} - 1\right) \quad ▶.$$

При $m \geqslant M\,(L/2d - 1)$ поворот происходит при любом α, при $m < (M/3)\,(L/2d - 1)$ брусок не повернется ни при каком α из заданного интервала углов.

1.120. Отклоним игрушку на угол α и посмотрим, что произойдет с центром тяжести. Если он опустится, то положение равновесия будет неустойчивым, игрушка упадет. На рис. О.1.120 отрезки OA и $O'A'$ вертикальны, $C'B \perp O'A'$, то есть отрезок $C'B$ горизонтален; легко доказать, что $\angle C'O'B = 2\alpha$, а $\angle AO'A' = \alpha$. Тогда

$$\Delta h = CA - BA' = CA - (O'A' + O'B) = (3/2)R - [2R\cos\alpha + (R/2)\cos 2\alpha] = R(1-\cos\alpha)^2 > 0.$$

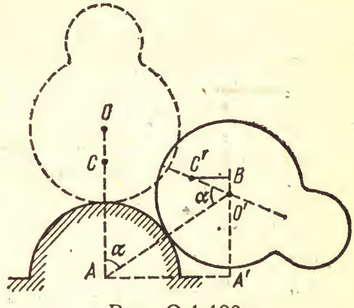


Рис. О.1.120

Таким образом, центр тяжести опустится, игрушка упадет. Можно было бы проанализировать, слева или справа от точки опоры при отклонении игрушки пройдет вертикаль, опущенная из ее центра тяжести C', и таким образом изучить равновесие, рассмотрев возникающие силы и моменты сил. Естественно, что вывод получился бы тем же: ◀ при отклонении игрушки возникают силы, которые увеличивают это отклонение, поэтому игрушка должна упасть ▶.

§ 6. Механика жидкости и газа

1.121. Масса воды, находящейся в данный момент t в воздухе, $m = \rho_0 Svt$. Связав поверхность земли с началом координат для вертикального движения, имеем

$$y = 0 = h + (v\sin\alpha)\,t - \frac{gt^2}{2}, \quad t = \frac{1}{g}\left[v\sin\alpha + (v^2\sin^2\alpha + 2gh)^{1/2}\right].$$

Окончательно

$$◀\ m = \frac{\rho_0 Sv}{g}\left[v\sin\alpha + (v^2\sin^2\alpha + 2gh)^{1/2}\right]\ ▶.$$

1.122. Ручка «половника» и оставшаяся жидкость должны расположиться в итоге так, чтобы вертикаль OD, проведенная через точку подвеса O, прошла через центр тяжести оставшейся жидкости и была перпендикулярна поверхности (рис. О.1.122):

$$OD \perp BC, \quad CD = DB, \quad DF = h.$$

Объем области, занятой жидкостью,

$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

Так как $BA \perp OA$, $OD \perp CB$, $CD = DB$, то

$$AK = KB = r, \quad \angle AOD = \angle ABC = \alpha,$$

следовательно,

$$\sin\alpha=\frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}},\quad h=r-r\sin\alpha=r\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}\right).$$

Отсюда ◀ $V=(28\pi/81)r^3$ ▶.

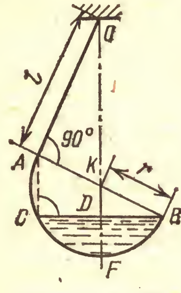


Рис. О.1.122

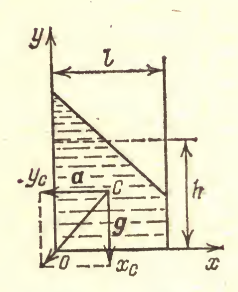


Рис. О.1.123

1.123. Пусть C — центр масс ускоренной воды. Поверхность воды уже не горизонтальна, перпендикуляр к этой поверхности направлен вдоль вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{g}$, направление которого совпадает с направлением результирующей силы, приложенной к центру масс. Если линия действия этой силы пройдет мимо площади опоры, то система перевернется. Критическим условием является прохождение линии действия результирующей силы через шарнир, то есть через точку O (рис. О.1.123). Обозначив через x_C горизонтальную координату центра масс, через y_C — вертикальную, получаем условие $a/g=x_C/y_C$. Центр масс трапеции можно найти, например, через центр масс треугольника и прямоугольника:

$$x_C=\frac{l}{2}-\frac{1}{12}\frac{a}{g}\frac{l^2}{h},\quad y_C=\frac{h}{2}+\frac{1}{24}\left(\frac{a}{g}\right)^2\frac{l^2}{h}.$$

Подставляя в вышеприведенное условие x_C, y_C, получаем уравнение

$$h^2-\frac{lg}{a}h+\frac{1}{12}\left(\frac{al}{g}\right)^2+\frac{l^2}{6}=0.$$

Отсюда

$$◀\ h_{1,2}=\frac{lg}{2a}\left\{1\pm\left[\left(1-\frac{a^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{3g^2}\right)\right]^{1/2}\right\}\ ▶.$$

1.124. Используя закон сохранения энергии и условие несжимаемости жидкости, получаем

$$W_\text{п}=\rho_0 gSh\cdot\frac{h}{2}=\rho_0 gS\frac{h^2}{2},\quad u=v\frac{S}{S_0},$$

$$W_\text{к}=\frac{mu^2}{2}=\rho_0 S\frac{h}{2}\cdot v^2\frac{S^2}{S_0^2},$$

где ρ_0 — плотность воды, u — скорость истечения воды. Тогда

$$◀ \ A=W_к-W_п=\frac{1}{2}\rho_0 hS\left[\left(v\frac{S}{S_0}\right)^2-gh\right] \text{ для } v>\sqrt{2gh}\frac{S_0}{S} \ ▶.$$

При $v \geqslant \sqrt{2gh_0}S_0/S$ происходит отрыв воды от поршня (h_0 — высота уровня воды при отрыве ее от поршня).

1.125. Условие равновесия стакана:

$$S(x-h)\rho_1 g+mg=\rho_2 gxS.$$

Учитывая закон Паскаля, получаем

$$◀ \ x=\frac{m-\rho_1 hS}{(\rho_2-\rho_1)S} \ ▶.$$

1.126. Введем расстояние h от верхней грани куба до поверхности жидкости. Имеем

$$\rho g l^3=[\rho_1 g(h+l-x)+\rho_2 gx]\,l^2-\rho_1 ghl^2.$$

Отсюда

$$◀ \ x=l\,\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1} \ ▶.$$

1.127. Запишем условие равенства моментов силы давления воды и силы тяжести, действующей на тело, с учетом отсутствия подтекания. В качестве оси вращения выбираем правое ребро нижней грани:

$$\frac{\rho g l}{2}\,[2\cdot 4l^3+(h-4l)l^2]=3l^3(2\rho-\rho)\,g\,\frac{3l}{2};$$

$$◀ \ h=5l \ ▶.$$

1.128. Пробкой вытеснен объем воды $\pi r^2 l$, следовательно, уровень воды повысился на Δh (объем $\pi R^2\Delta h=\pi r^2 l$). Изменение высоты центра тяжести воды равно $\Delta h/2+h-r$. Искомая работа равна изменению потенциальной энергии вытесненного объема:

$$◀ \ A=\pi r^2 l\rho_0 g\left(\frac{r^2 l}{2R^2}+h-r\right) \ ▶.$$

1.129. Введем высоту H уровня жидкости над пробкой. Условие отсутствия движения пробки:

$$p_{ср}S\geqslant f+p_0 S,$$

где $p_{ср}=p_0+\rho g(H+h/2)$, $S=dh$, $f=k(\rho gH+p_0)\,ld$. Отсюда получаем

$$◀ \ H\geqslant\frac{kp_0 l-\rho gh^2/2}{\rho g(h-kl)} \ ▶.$$

Это условие для высоты уровня жидкости над пробкой справедливо при

$$kl<h<\sqrt{\frac{2kp_0 l}{\rho g}}, \quad \text{если} \quad k>\frac{4p_0}{\rho gl},$$

и при

$$\sqrt{\frac{2kp_0 l}{\rho g}}<h<kl, \quad \text{если} \quad k<\frac{4p_0}{\rho gl}.$$

1.130. ◀ $F=\rho g l^3 \cos\alpha+\rho_0 g l^2 [h+(l/2)\sin\alpha]$ ▶. Первое слагаемое — составляющая силы тяжести, действующей на кубик, второе — сила давления столба воды над кубиком; эта сила давления направлена по нормали к грани.

1.131. $F_1=\frac{SH\rho g}{2}$, $F_2=\frac{SH\rho g}{2}+\frac{SH\rho_0 g}{2}=3F_1=\frac{3SH\rho g}{2}$. ◀ $\rho=\rho_0/2$ ▶.

1.132. Полная сила давления

$$F=\frac{\rho_0 g h^2 l}{2\sin\alpha}$$

и направлена по нормали к бруску. Брусок находится в состоянии покоя, если

$$\frac{\rho_0 g h^2 l}{2}=k\left(mg+\frac{\rho_0 g h^2 l}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

$$◀\ k=\frac{\rho_0 g h^2 l}{\rho_0 g h^2 l+2mg}=0{,}1.$$

Брусок придет в движение, если $k<0{,}1$ ▶.

1.133. Введем l — расстояние, на которое выступает пробка из дна. Из подобия геометрических тел $l^2/h^2=S_0/S$.

Максимальная выталкивающая сила возникает, лишь если вода доходит до верха пробки. Тогда

$$\frac{hS}{3}(\rho_0-\rho)g-\frac{lS_0}{3}\rho_0 g-(h-l)S_0\rho_0 g=0.$$

Исключая h, получаем

$$◀\ \rho=\rho_0\left[1+2\left(\frac{S_0}{S}\right)^{3/2}-\frac{3S_0}{S}\right]\ ▶.$$

1.134. 1. Условие поворота пластинки относительно правого края трубки:

$$(\rho-\rho_0)g\pi R^2 h(d+r)\geqslant\rho_0 g(H-x)\pi r^3.$$

При выполнении этого условия пластинка начнет поворачиваться, вода войдет в трубку, равновесие нарушится и пластинка упадет, если сила тяжести, действующая на нее, больше результирующей выталкивающей силы. Отсюда

$$x\geqslant H-\left(\frac{R}{r}\right)^2 h\left(1+\frac{d}{r}\right)\left(-1+\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Пластинка отваливается без вращения, если

$$(\rho-\rho_0)g\pi R^2 h\geqslant\rho_0 g(H-x)\pi r^2,$$

$$x\geqslant H+\left(\frac{R}{r}\right)^2 h\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Сравнение ограничений, накладываемых на x, приводит к следующему:

$$◀\ x\geqslant H-\left(\frac{R}{r}\right)^2 h\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\ ▶.$$

2. Пластинка перевернется и всплывет при нарушении равенства моментов относительно левого края трубки:

$$(\rho_0-\rho)\,g\pi R^2h\,(d-r)\geqslant\rho_0 g\,(H-x)\,\pi r^3,$$

$$◀\ x\geqslant H+\left(\frac{R}{r}\right)^2 h\left(1-\frac{d}{r}\right)\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\ ▶.$$

1.135. 1. Из геометрических соображений и из определения центра тяжести следует, что плечо выталкивающей силы относительно правого края трубки равно $a/6+r$. Клин отвалится, повернувшись, если

$$(\rho-\rho_0)\,ga^2\,\frac{b}{2}\left(\frac{a}{6}+r\right)\geqslant\rho_0 g\,(H-x)\,\pi r^3,$$

$$x\geqslant H+\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)a^2\frac{b}{2\pi r^2}\left(\frac{a}{6r}+1\right).$$

Чтобы клин упал без вращения, необходимо выполнение условия для силы:

$$\rho_0 g\,[(H-x)\,\pi r^2+a^2b/2]\leqslant\rho g a^2 b/2,$$

$$x\geqslant H+\frac{a^2b}{2\pi r^2}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Сравнение ограничений, накладываемых на x, приводит к следующему:

$$◀\ x\geqslant H-\frac{a^2b}{2\pi r^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\ ▶.$$

2. Плечо выталкивающей силы относительно правого края трубки равно $a/6-r$. Клин перевернется и всплывет, если

$$(\rho_0-\rho)\,g\,a^2\,\frac{b}{2}\left(\frac{a}{6}-r\right)\geqslant\rho_0 g\,(H-x)\,\pi r^3.$$

Отсюда

$$◀\ x\geqslant H-\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{b}{2\pi r^2}\,a^2\left(\frac{a}{6r}-1\right)\ ▶.$$

1.136. $\frac{mg}{S}=2\rho gh$; ◀ $h=\frac{m}{2\rho S}$ ▶.

1.137. Жидкость, втекая из левого колена через отверстие в правое, разорвет столб жидкости; ту жидкость, что была над отверстием, поднимет, а ту, что была под отверстием, опустит (рис. О.1.137).

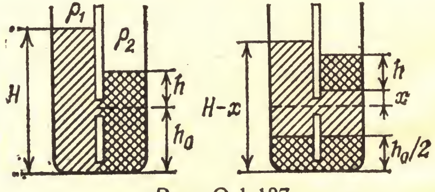


Рис. О.1.137

Из условия равенства давлений в левом и правом коленах на уровне отверстия следует, что ниже отверстия жидкости расположатся

одинаково. В левое колено войдет столб другой жидкости высоты $h_0/2$ и столько же войдет другой жидкости ниже уровня отверстия справа. Таким образом, уровень жидкости в правом колене изменится только на величину x, равную изменению уровня в левом колене.

Введем h — высоту уровня жидкости справа выше отверстия до начала перетекания, H — высоту уровня жидкости слева. Тогда из условия равенства давлений внизу $(h+h_0)\rho_2=H\rho_1$, из условия равенства давлений на уровне отверстия, после того как перетекание прекратилось, $h\rho_2+x\rho_1=(H-h_0-x)\rho_1$. Отсюда

$$◀\ x=\frac{h_0}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\ ▶.$$

1.138. Выразим давление через среднюю плотность жидкости:

$$p=\rho_{\text{ср}}gh=\rho_0\left(1+\frac{\alpha h}{2}\right)hg,$$

$$◀\ h=\frac{1}{\alpha}\left[\left(1+\frac{2p\alpha}{\rho_0 g}\right)^{1/2}-1\right]\ ▶.$$

1.139. Выразим массу жидкости через среднюю плотность:

$$M=\rho_{\text{ср}}h_0S=\frac{\rho_0+\rho}{2}h_0S=\rho_0h_0\left(1+\frac{\alpha h_0}{2}\right)S.$$

Отсюда

$$\alpha h_0^2+2h_0-\frac{2M}{S\rho_0}=0,\quad h_0=\frac{1}{\alpha}\left[\left(1+\frac{2M\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2}-1\right].$$

При условии плавания кубика его погружение эквивалентно увеличению общей массы жидкости:

$$h=\frac{1}{\alpha}\left[\left(1+\frac{2(M+m)\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2}-1\right].$$

Окончательно

$$◀\ \Delta h=\frac{1}{\alpha}\left[\left(1+\frac{2(M+m)\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2}-\left(1+\frac{2M\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2}\right]\ ▶.$$

1.140. Сравниваем моменты сил относительно центра погруженной части бревна:

$$mg\frac{l}{4}=T\frac{3l}{4},\quad ◀\ T=\frac{mg}{3}=8\cdot10^2\ \text{Н}\ ▶.$$

1.141. Условие равновесия шара дает

$$\rho gV-\rho_0g\frac{V}{2}=\rho g\frac{4V}{3},$$

где ρ_0 — плотность воды, ρ — плотность шара:

$$◀\ \rho=3\rho_0/4=0{,}75\cdot10^3\ \text{кг/м}^3\ ▶.$$

1.142. Условие равновесия дает

$$\rho_1g\frac{m}{\rho_1'}-mg=\rho_2g\frac{m}{\rho_2'}-mg;\quad ◀\ \frac{\rho_1'}{\rho_2'}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\ ▶.$$

1.143. Используя равенство моментов сил, получаем

$$\rho_2-\frac{3}{4}\rho_1+\frac{1}{4}\rho_1-\rho_0=0,$$

откуда

$$◀\ \rho_2=\rho_0+\frac{1}{2}\rho_1\ ▶.$$

1.144. $◀\ m_{\min}=\frac{8\pi}{3}r^3\rho_0\left(1+\frac{r}{l}\right)\ ▶.$

1.145. Обозначим через α угол, который нить образует с вертикалью: $\sin\alpha=1/2$, $\alpha=30°$. Выталкивающая сила вдвое больше силы тяжести, то есть вверх на шар действует сила $F_A=mg$. Сила натяжения нити T, сила реакции стенки N и сила F_A, векторно складываясь, дают нуль:

$$\frac{N}{F_A}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сила, с которой шар давит на стенку, равна по модулю силе N. Отсюда $◀\ N=mg/\sqrt{3}\ ▶.$

1.146. Из равенства моментов сил следует, что

$$N\frac{l}{2}\sin\alpha=mg\frac{l}{4}\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$◀\ N=\frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha\ ▶.$$

1.147. Тонкий слой жидкости полностью передает ее давление. Таким образом, на призму действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления и выталкивающая сила, сумма которых равна нулю.

$$◀\ F_{\text{сопр}}=(\rho_2-\rho_1)gV\sin\alpha\ ▶.$$

1.148. Деформация пружины пропорциональна нагрузке. Тонкий слой жидкости передает давление — в результате можно находить выталкивающую силу обычным путем:

$$\frac{(\rho_2-\rho_1)Vg\sin\alpha}{\rho_1 Vg}=\frac{x-l_0}{l-l_0},\quad ◀\ x=l_0+(l-l_0)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\sin\alpha\ ▶.$$

1.149. В отсутствие воды для движения центра шара вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω необходимо, чтобы со стороны цилиндрического сосуда на шар действовала сила

$$F=(4\pi/3)r^3\rho\omega^2(R-r).$$

Если сосуд наполнен водой, то

$$◀\ F=\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)\omega^2(R-r)\ ▶.$$

1.150. Внутренняя воздушная цилиндрическая полость, образовавшаяся при вращении сосуда с водой, имеет объем $\pi R^2h/4$, то

есть расстояние от полости оси до поверхности воды равно $R/2$. Расстояние от оси вращения до центра тяжести стержня, таким образом, равно $R/2+l/6$, а расстояние до центра тяжести части стержня, вытеснившей воду, равно $R/2+l/3$. Зная положение центра тяжести, давление жидкости, обусловленное гравитацией, и давление, возникающее в жидкости при установившемся вращении, получаем

$$\rho S l\omega^2\left(\frac{R}{2}+\frac{l}{6}\right)=\rho_0 S\frac{2}{3}l\omega^2\left(\frac{R}{2}+\frac{l}{3}\right).$$

Отсюда

$$◀\ \rho=\frac{2}{3}\rho_0\frac{3R+2l}{3R+l}\ ▶.$$

1.151. Потенциальная энергия бруска в обоих случаях одинакова, а потенциальная энергия воды — нет. Равновесие бруска устойчиво в том случае, когда центр тяжести вытесненной воды расположен выше: $h_{\rm I}=1/4$, $h_{\rm II}=1/(3\sqrt{2})$; $h_{\rm II}<h_{\rm I}$, где h (в условных единицах) — расстояние по вертикали от центра тяжести вытесненной воды до центра тяжести бруска. Значит, положение II устойчиво. Тот же результат, естественно, дает и анализ устойчивости, проведенный исходя из сравнения вращающих моментов сил при небольшом отклонении бруска от положения равновесия.

1.152. К моменту времени, когда растаяло 70% льда, остался пористый лед, имеющий толщину слоя $h(1-\beta)$. Слой воды, проникший в поры льда (рис. О.1.152), имеет толщину

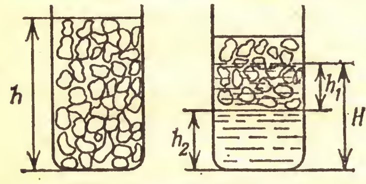


Рис. О.1.152

$$h_1=h(1-\beta)\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Тогда масса воды в порах льда

$$m_0=(1-\alpha)\rho_0 S h_1=(1-\alpha)(1-\beta)\rho h S.$$

В результате таяния образовалась вода массы

$$m_0'=\alpha\beta h S\rho.$$

Если $m_0'-m_0>0$, то лед всплывает (то есть для всплывания льда должно быть $\alpha+\beta>1$, что реализуется по условиям задачи: $\alpha+\beta=1{,}3$). Высота уровня воды под слоем льда

$$h_2=\frac{m_0'-m_0}{\rho_0 S}=h(\alpha+\beta-1)\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Искомая полная высота уровня воды

$$◀\ H=h_1+h_2=h\left[(\alpha+\beta-1)+(1-\beta)\right]\frac{\rho}{\rho_0}=\alpha h\frac{\rho}{\rho_0}=0{,}54h\ ▶.$$

Если убедиться в том, что в результате таяния заданного количества льда оставшийся лед всплывает, то ответ можно полу-

чить сразу. Действительно, если лед плавает, то от его таяния уровень воды в сосуде не изменяется: лед, плавая, вытесняет воду массы, равной той, что имеет сам. Значит, при таянии образуется столько воды, сколько вытеснилось, и уровень воды не изменится. Исходя из этого, предположим, что весь лед растаял, и найдем результирующую высоту уровня воды:

$$hS\alpha\rho = HS\rho_0, \quad \text{откуда} \quad ◀ \ H = \alpha h \frac{\rho}{\rho_0} = 0{,}54h \ ▶.$$

1.153. По закону сохранения энергии

$$2\pi r S\rho_0 \frac{v^2}{2} = (\rho_0 - \rho)\, glrS\,(1 + \sqrt{2});$$

$$◀ \ v = \left[\frac{lg}{\pi}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)(1 + \sqrt{2})\right]^{1/2} \ ▶.$$

1.154. Введем сечение трубки S. В заданный момент

$$lS\rho a = \rho g h S.$$

Отсюда $a = gh/l$. Столб жидкости высоты H приобретает ускорение a под действием силы тяжести и силы давления со стороны жидкости, подпирающей столб:

$$\rho H S a = \rho g H S - pS.$$

Отсюда

$$◀ \ p = \rho g H\,(1 - h/l) \ ▶.$$

1.155. Пусть $\rho_0 v S$ — масса воды, поступающая в единицу времени из насоса при скорости истечения v через сечение S. Тогда мощность насоса без дополнительной трубы

$$P_0 = \rho v S \frac{v^2}{2}.$$

При наличии трубы высоты h мощность насоса

$$P = \rho u S \frac{u^2}{2} + \rho u S g h,$$

где u — скорость воды, протекающей через выходное отверстие дополнительной трубы.

Наконец, из кинематических соображений имеем

$$v^2 = 2gH, \quad u^2 = 2g\,(H - h).$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$◀ \ \frac{P}{P_0} = \frac{u}{v}\left[\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2\frac{gh}{v^2}\right] = \frac{u}{v} = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{1/2} \ ▶.$$

Можно решить задачу значительно проще, заметив, что напор воды в обоих случаях одинаков, так как полная высота фонтанов одна и та же. Тогда, используя формулы $P = uF$, $P_0 = vF$, получаем сразу

$$◀ \ \frac{P}{P_0} = \frac{u}{v} = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{1/2} \ ▶.$$

1.156. Сила давления на брусок одной струи

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\rho v'^2 S'.$$

Тогда

$$n\rho v^2 S=mg,$$

так как из условия несжимаемости струи следует, что $v'S'=vS$; наконец, из кинематических соображений

$$v'^2=v_0^2-2gh.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$◀\ h=\frac{1}{2g}\left[v_0^2-\left(\frac{mg}{n\rho v_0 S}\right)^2\right]\ ▶.$$

1.157. Если стержень движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, то так как жидкость несжимаема, она должна протекать в противоположную сторону между стержнем и стенками трубы со скоростью $\boldsymbol{u}$, причем

$$S_1 v=S_2 u, \quad \text{то есть} \quad \pi r^2 v=\pi (R^2-r^2)\,u.$$

Отсюда

$$u=v\frac{r^2}{(R^2-r^2)}.$$

Скорость жидкости $\boldsymbol{u}$ предполагается одинаковой всюду, кроме небольших участков около торцов стержня. Однако если длина цилиндра $l \gg r$, то вкладом этих участков в энергию системы можно пренебречь.

Из закона сохранения энергии при подъеме стержня на высоту h следует, что

$$\rho_2\pi r^2 l\frac{v^2}{2}+\rho_1\pi (R^2-r^2)\,l\frac{u^2}{2}=(\rho_1-\rho_2)\,\pi r^2 lgh.$$

Таким образом,

$$◀\ v=\left[\frac{2gh\,(1-\rho_2/\rho_1)}{\rho_2/\rho_1+r^2/(R^2-r^2)}\right]^{1/2}, \quad a=\frac{v^2}{2h}=g\frac{1-\rho_2/\rho_1}{\rho_2/\rho_1+r^2/(R^2-r^2)}\ ▶.$$

1.158. Изменение импульса выделенного объема жидкости за малое время

$$\rho S_2 v_2\,\Delta t v_2-\rho S_1 v_1\,\Delta t v_1=(S_1 p_1-S_2 p_2+F_0)\,\Delta t,$$

где $\rho S_1 v_1 \Delta t$ — масса жидкости, прошедшей через сечение S_1 за время Δt, F_0 — сила, с которой труба действует на жидкость. Искомая сила

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}_0; \quad F=S_1 p_1+S_2 p_2-\rho\,(S_1 v_1^2-S_2 v_2^2),$$

$$◀\ F=S_2 p_2-S_1 p_1-\rho S_1 v_1^2\,(1-S_1/S_2)\ ▶.$$

Закон сохранения энергии для объема жидкости, протекшей за время Δt между сечениями I и II, дает

$$p_1 S_1 v_1\,\Delta t-p_2 S_2 v_2\,\Delta t=\frac{\Delta m v_1^2}{2}-\frac{\Delta m v_2^2}{2}+\Delta Q.$$

Здесь в левой части уравнения — работа силы давления, произведенная над интересующим нас объемом жидкости, а в правой части — изменение кинетической энергии этого объема жидкости и количества теплоты, выделившегося между сечениями I и II за время Δt. Учитывая свойство несжимаемости жидкости, получаем

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \, \Delta t = \rho S_2 v_2 \, \Delta t$$

и, окончательно, количество теплоты, выделившееся в единицу времени,

$$◀ \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = S_1 v_1 \left[(p_1 - p_2) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) \right] \quad ▶.$$

1.159. Пусть скорость движения поршня равна v, скорость движения поверхности S равна u. Тогда за время Δt в результате смещения поршня на расстояние $v\,\Delta t$ в движение со скоростью u придут частицы среды, находящиеся в объеме $v\,\Delta t \pi r^2$ (их плотность равна ρ_1, остальные частицы, плотность которых равна $\rho_2 - \rho_1$, уже движутся со скоростью u). Таким образом, из условия сохранения массы следует, что вещество, находящееся в объеме $v\,\Delta t \pi r^2$, при смещении поршня на расстояние $v\,\Delta t$ должно распределиться по объему $u \Delta t \pi r^2$, причем здесь оно будет иметь плотность $\rho_2 - \rho_1$:

$$v \rho_2 \, \Delta t \pi r^2 = u\,(\rho_2 - \rho_1)\, \Delta t \pi r^2, \qquad u = v\rho_2/(\rho_2 - \rho_1).$$

Импульс частиц в объеме $v\,\Delta t \pi r^2$ равен $\rho_1 v\,\Delta t \pi r^2 u$ и равен импульсу силы F:

$$F\,\Delta t = \rho_1 v\,\Delta t \pi r^2 u = \pi v^2 \frac{\rho_2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} r^2 \,\Delta t.$$

Таким образом,

$$◀ \quad v = \left[\frac{F\,(\rho_2 - \rho_1)}{\pi r^2 \rho_1 \rho_2} \right]^{1/2} \quad ▶.$$

1.160. Скорость жидкостей максимальна, когда они проходят положение равновесия. Из закона сохранения энергии с учетом того, что в положении равновесия $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ (где h_1 и h_2 — высота столба жидкости в одном и другом коленах трубки, когда жидкости находились в первоначальном положении; ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкостей, налитых в трубку), получаем

$$◀ \quad v_{\max}^2 = g \frac{h_0^2}{h_1} \quad ▶.$$

Глава II. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 1. Газовые законы

2.1. ◀ $a = pS/16m$ ▶.

2.2. Скорость максимальна в момент, когда поршень проходит положение равновесия. Таким образом,

$$◀ \quad p = p_0 + \frac{mg}{S} \quad ▶.$$

2.3. Из условий равновесия в начале и в конце нагрева получаем

$$mg + Mg - \pi r^2 (p_1 - p_0) = 0, \quad mg - \pi r^2 (p_1 - p_2) = 0.$$

По закону Шарля

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_2}{T_2}. \quad ◀ \; T_2 = T_0 \left[\frac{p_0 - (m+M) g/\pi r^2}{p_0 - Mg/\pi r^2}\right] \; ▶.$$

2.4. Зависимость площади дна сосуда от температуры имеет вид

$$S = S_0 (1 + \alpha t)^2.$$

Масса жидкости не изменилась. Поэтому

$$◀ \; p = \frac{p_0}{(1+\alpha t)^2} \approx \frac{p_0}{(1+2\alpha t)} \; ▶.$$

Попытки прямо учитывать расширение жидкости в итоге дают тот же результат.

2.5. Так как лист удерживается на крыше силой трения, очевидно, что при его нагреве имеются точки листа, неподвижные относительно крыши. Обозначим буквой x_0 расстояния от них до нижнего края листа. При сжатии листа в процессе охлаждения будут неподвижными некоторые другие точки листа. Обозначим расстояния от этих точек до нижнего края листа буквой x_0'.

При нагреве часть листа, расположенная ниже неподвижных точек, сползает вниз, а часть листа, расположенная выше, движется вверх. В результате этих движений на верхнюю часть листа действует сила трения

$$f_1 = kmg \frac{l - x_0}{l} \cos \varphi,$$

направленная вдоль крыши вниз, а на нижнюю часть листа действует сила трения

$$f_2 = kmg \frac{x_0}{l} \cos \varphi,$$

направленная вдоль крыши вверх. Имеется также составляющая силы тяжести $mg \sin \varphi$, направленная вдоль листа вниз. Так как лист нагревается медленно и его части движутся с очень малой скоростью, то с высокой точностью можно предполагать, что лист в любой момент времени находится в равновесии. То есть, в частности, сумма сил, направленных вдоль крыши, равна нулю:

$$-kmg \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) \cos \varphi + kmg \left(\frac{x_0}{l}\right) \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$x_0 = l \frac{\sin \varphi + k \cos \varphi}{2k \cos \varphi}.$$

Таким образом, при нагреве нижний край листа сместится относительно крыши на расстояние

$$\Delta x_0 = \frac{\alpha l}{2k} (t_2 - t_1) \frac{\sin \varphi + k \cos \varphi}{\cos \varphi},$$

При охлаждении размеры листа сокращаются, нижняя часть листа движется вдоль крыши вверх к неподвижным точкам, а верхняя — вниз.

Это движение приводит к изменению знаков у сил трения. С учетом этого изменения получаем, что расстояние от неподвижных точек до нижнего края листа при охлаждении

$$x_0' = \frac{l}{2k} \frac{k\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi},$$

то есть нижний край листа поднимается при охлаждении на расстояние

$$\Delta x_0' = \frac{\alpha l}{2k}(t_2 - t_1)\frac{k\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

За одни сутки изменение положения нижнего края листа

$$\Delta l = \Delta x_0 - \Delta x_0' = \frac{\alpha l}{k}(t_2 - t_1)\operatorname{tg}\varphi.$$

За $n=30$ суток устойчивой погоды смещение будет в n раз больше:

$$◄\ \Delta L = \frac{n\alpha l}{k}(t_2 - t_1)\operatorname{tg}\varphi = 8\ \text{см}\ ►.$$

2.6. Уравнение вращательного движения поршня:

$$m\omega^2 x = (p_0 - p)S.$$

Условие отсутствия перемещения поршня вдоль трубки:

$$px = p_0 l,$$

где p — давление между поршнем и запаянным концом вращающейся трубки. Отсюда

$$\frac{m\omega^2}{p_0 S}x^2 - x + l = 0, \quad x_{1,2} = \frac{p_0 S}{2m\omega^2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{4m\omega^2 l}{p_0 S}\right)^{1/2}\right].$$

Очевидно, что должно выполняться условие $4m\omega^2 l/p_0 S < 1$, иначе поршень из трубки вылетит. Для того чтобы выяснить, оба ли корня уравнения подходят, обратимся к рис. О.2.6, на котором изображены графики двух функций:

$$y_1 = (m\omega^2/p_0 S)x^2 + l, \quad y_2 = x.$$

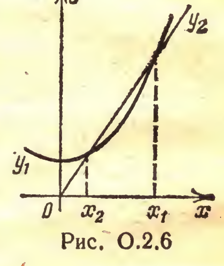


Рис. О.2.6

Пересечение этих графиков дает два корня x_1 и x_2 исследуемого квадратного уравнения. Нетрудно видеть, что корень x_1 соответствует неустойчивому положению равновесия поршня, а корень x_2 — устойчивому. Следовательно, из физических соображений подходит лишь один корень, соответствующий знаку «—» в скобках. Таким образом,

$$◄\ x = \frac{p_0 S}{2m\omega^2}\left[1 - \left(1 - \frac{4m\omega^2 l}{p_0 S}\right)^{1/2}\right]\ ►.$$

2.7. Система вначале находится в состоянии равновесия, поэтому

$$p_0+\rho g H_1=p_1,$$

где p_1 — давление газа под поршнем в начальный момент. Из закона Бойля — Мариотта следует, что

$$p_1 hS=(p_0+\rho g H_2)(H_1+h-x-H_2)S.$$

Таким образом,

$$◀\ x=H_1+h-H_2-\frac{p_0+\rho g H_1}{p_0+\rho g H_2}h\ ▶.$$

2.8. Воздух не проходит в отверстие, пока толщина слоя воды удовлетворяет условию

$$p_0+\rho_0 g(h-x)=p_0\frac{h}{(h-x)},$$

$$x^2-\left(2h+\frac{p_0}{\rho_0 g}\right)x+h^2=0,\quad x=h+\frac{p_0}{2\rho_0 g}-\left[\left(h+\frac{p_0}{2\rho_0 g}\right)^2-h^2\right]^{1/2}.$$

Знак «+» отброшен, так как $x<h$. Окончательно имеем

$$◀\ x=h+\frac{1}{2}\frac{p_0}{\rho_0 g}\left[1-\left(\frac{4\rho_0 gh}{p_0}+1\right)^{1/2}\right]\ ▶.$$

2.9. Из закона Бойля — Мариотта следует, что

$$p_0 h=p(h-x).$$

Из условия равновесия воды на дне сосуда следует, что

$$p_0+\rho_0 gl=p+\rho_0 gx.$$

Отсюда

$$x^2-\left(\frac{p_0}{\rho_0 g}+l+h\right)x+hl=0.$$

Окончательно

$$◀\ x_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{p_0}{\rho_0 g}+l+h\pm\left[\left(\frac{p_0}{\rho_0 g}+l+h\right)^2-4hl\right]^{1/2}\right\}\ ▶.$$

2.10. Из условий равновесия получаем

$$p_0 l_1 S=(p_0+\Delta p)\,l_2 S=(p_0-\Delta p)\,xS,$$

где Δp — изменение давления газа при повороте пробирки. Если $l_1\geqslant 2l_2$, то капля выпадает. Таким образом,

$$◀\ x=\frac{l_1 l_2}{2l_2-l_1},\quad l_2<l_1<2l_2\ ▶.$$

2.11. Вначале $p_{EF}=0$, $p_{AB}=p=2\rho gh$, $p_{CD}=\rho gh=p/2$. После поворота трубки $p'_{C'D'}=p_1$, $p_F=p_1+p/2$, $p'_{AB'}=p_2$, где $AB'=x$, $C'D'=3h-x$; из закона Бойля — Мариотта:

$$(p/2)\,h=p_1(3h-x),\qquad ph=p_2 x.$$

Из условия равновесия капелек ртути (рис. О.2.11):

$$p_1-p_2=\rho gh-p/2,\qquad p_F=p_1+\rho gh=p_1+p/2.$$

Для p_F' получаем уравнение

$$6p_F'^2 - 12pp_F' + 5p = 0,$$

откуда $p_F' = p\,(1 \pm 1/\sqrt{6})$. Знак «—» отбросим, так как давление растет. Окончательно имеем

$$◀\ p_F' = p\,(1 + 1/\sqrt{6})\ ▶.$$

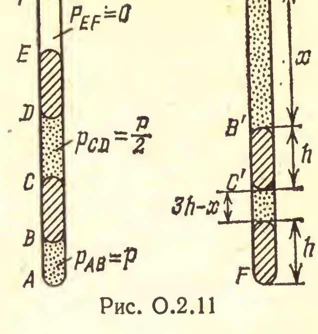


Рис. О.2.11

2.12. Так как

$$\frac{mg}{S} + p_0 > \frac{mg}{2S} + p_0,$$

то правый поршень сразу опустится до горизонтального участка трубки. Введем высоту поршня в левом колене x. Тогда по закону Бойля — Мариотта имеем

$$p\,(2x + 3h)\,S = p_0 \cdot 6hS.$$

Из условия равновесия поршней следует, что

$$p = \frac{mg}{2S} + p_0.$$

Таким образом,

$$◀\ x = \frac{3}{2}h\,\frac{p_0 - mg/2S}{p_0 + mg/2S} \quad \text{при} \quad \frac{mg}{2S} < p_0,$$

$$x = 0 \quad \text{при} \quad \frac{mg}{2S} \geqslant p_0\ ▶.$$

2.13. Введем искомое смещение x, начальную и конечную высоты уровня ртути h_1 и h_2, начальное и конечное давления воздуха p_1 и p_2, плотность ртути ρ.

Условие неизменности объема ртути:

$$h_1 l = h_2\,(l + x).$$

Из условия равновесия поршня до изменения температуры:

$$p_1 h_1 = p_{1\,\text{ср}} h_1 = \rho g \frac{h_1}{2} h_1 = \rho g \frac{h_1^2}{2},$$

и после:

$$p_2 h_1 = p_{2\,\text{ср}} h_2 = \rho g \frac{h_2}{2} h_2 = \rho g \frac{h_2^2}{2},$$

имеем

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2.$$

Используя уравнение газового состояния, получаем

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1} = \frac{T_1\,(l - x)}{T_2 l} = \frac{3\,(l - x)}{l} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{l + x}{l}\right)^2.$$

Отсюда

$$◀ \ x=\frac{\sqrt{33}-5}{2} l \ ▶.$$

2.14. $(p_1 \pm \Delta p)(V \mp \Delta V)=\frac{m}{\mu} RT, \quad p_2(2V \mp \Delta V)=2\frac{m}{\mu} RT,$

$$◀ \ p_2=p_1\frac{1 \pm \Delta p/p_1}{1 \pm \Delta p/2p_1} \ ▶.$$

Знаки «+» и «—» соответствуют вдвиганию или выдвиганию поршня.

2.15. Из условия равновесия поршней начальное давление в верхнем и нижнем отсеках равно соответственно $2p_0=p_0+mg/S$ и $3p_0=p_0+2mg/S$. Используя закон Бойля — Мариотта, получаем

$$3p_0lS=x(F+2p_0S), \quad 2p_0lS=(l-x)(F+p_0S),$$

где x — искомое расстояние, F — сила дополнительного давления на верхний поршень. Отсюда имеем

$$◀ \ x=l(3-\sqrt{6})=5{,}5 \text{ см} \ ▶.$$

Второй корень уравнения не удовлетворяет условию $x<l$.

2.16. Введем смещение поршней x. Объем воздуха между поршнями после их смещения

$$V'=V_0+x(S_2-S_1).$$

Из закона Бойля — Мариотта

$$V_0p_0=V'p',$$

где p' — давление воздуха между поршнями после их смещения. Из условия равновесия стержня

$$(p-p')S_1=(p_0-p')S_2.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$◀ \ x=\frac{V_0}{S_1-S_2}\,\frac{p-p_0}{p+p_0S_2/S_1} \ ▶.$$

2.17. Условия равновесия до и после изменения температуры дают

$$p_1S_1=p_2S_2, \quad p_1'S_1=p_2'S_2.$$

Уравнение состояния газа дает

$$\frac{V_1p_1}{T_0}=\frac{V_1'p_1'}{T_1'}, \quad \frac{V_2p_2}{T_0}=\frac{V_2'p_2'}{T_2'}.$$

Учитывая, что $V_1'/V_1=3/2$, $V_2'/V_2=1/2$, получим

$$\frac{T_1'}{T_2'}=\frac{V_1'V_2}{V_1V_2'}=3, \quad ◀ \ T_1'=3T_2' \ ▶.$$

2.18. Условия равновесия для пробок дают (рис. О.2.18)

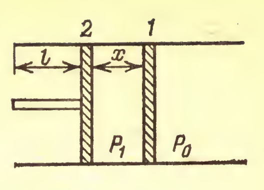
$$p_1S=f+p_0S,\quad p_2S=f+p_1S,$$

где f — сила трения между поверхностью трубы и пробкой. По закону Бойля — Мариотта

$$lSp_0=p_1xS,\quad lSp_0=p_2(l-x)S.$$

Таким образом,

$$◀\ f=p_0S/\sqrt{2}\ ▶.$$



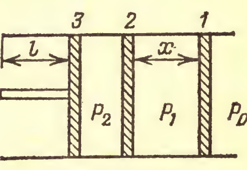


Рис. О.2.18

2.19. Следует рассмотреть два случая: 1. $kmg\geqslant\varkappa l$ и 2. $kmg<\varkappa l$.

1. Камера покоится: $(p-p_0)S=\varkappa l$, $\quad p\dfrac{2Sl}{T}=p_0\dfrac{Sl}{T_0}$. Отсюда

$$◀\ \frac{T}{T_0}=2\left(1+\frac{\varkappa l}{pS}\right)\quad \text{при}\quad kmg\geqslant\varkappa l\ ▶.$$

2. Камера покоится до момента достижения максимального значения силы трения покоя. Найдем соответствующую этому моменту температуру T'. Деформация пружины $x=kmg/\varkappa$, кроме того

$$p-p_0=\frac{kmg}{S},\quad \frac{pS(l+x)}{T'}=\frac{p_0Sl}{T_0},$$

$$\frac{T'}{T_0}=\left(1+\frac{kmg}{p_0S}\right)\left(1+\frac{kmg}{\varkappa l}\right).$$

После возникновения проскальзывания камеры процесс увеличения объема идет при постоянном давлении:

$$\frac{T}{T'}=\frac{V}{V'}=\frac{2lS}{(l+x)S}=\frac{2}{1+kmg/\varkappa l}.$$

Подставляя в это выражение значение T', получаем

$$◀\ \frac{T}{T_0}=2\left(1+\frac{kmg}{p_0S}\right)\quad \text{при}\quad kmg<\varkappa l\ ▶.$$

2.20. $◀\ m=\mu h(p_0S+mg)/RT\ ▶.$

2.21. В сосуде, падающем свободно, газ находится в состоянии невесомости. Поэтому искомая разность сил давления $F=mg$. Массу газа можно найти из уравнения газового состояния:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT=\frac{m}{\mu}\frac{p_0V_0}{T_0}T.$$

Таким образом,

$$◀\ F=mg=\mu g\frac{pVT_0}{p_0V_0T}\ ▶.$$

2.22. $p_2/p_1=m_2/m_1=n,\quad p_1=p_2-mg/S;$

$$◀\ p_1=\frac{mg}{S(n-1)},\quad p_2=\frac{kmg}{S(n-1)}\ ▶.$$

2.23. Условие равновесия поршня до проникновения гелия:

$$p_{He} + mg/S = p_{O_2},$$

где p_{O_2} — давление кислорода, и после выравнивания концентрации гелия по всему сосуду:

$$p' = p'_{He} + p'_{O_2} = mg/S.$$

По закону Бойля — Мариотта

$$p_{He} lS = 2p'_{He} lS, \quad p_{O_2} hS = p'_{O_2} (h+x) S.$$

Окончательно для смещения поршня получаем

$$◀ \ x = h \frac{p_{He} S}{mg} \quad \text{при} \quad p_{He} < \frac{mg}{S},$$

$$x = h \quad \text{при} \quad p_{He} \geqslant \frac{mg}{S} \ ▶.$$

2.24. Уравнение состояния газа:

$$\frac{p_0 SH}{T_0} = \frac{pSh}{T},$$

где h — расстояние от дна перевернутого стакана до уровня втянутой в него воды. Условие равновесия втянутой в стакан воды:

$$pS + mg = p_0 S, \quad h = H - \frac{m}{\rho_0 S}.$$

Отсюда

$$◀ \ T = \frac{T_0}{(1 - mg/p_0 S)(1 - m/\rho_0 HS)} \approx 350\ \text{К} \approx 80\ °\text{C} \ ▶.$$

§ 2. Пар

2.25. Из закона сохранения энергии и условия равенства объемов платины и испарившейся воды имеем

$$◀ \ t_{02} = t_{кип} + \frac{c_1}{c_2} (t_{кип} - t_{01}) + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\lambda_1}{c_2} = 1{,}25 \cdot 10^3\ °\text{C} \ ▶.$$

2.26. Запишем баланс тепловых энергий:

$$q_1 \lambda + c q_1 (t_1 - t_2) = c q_2 (t - t_2).$$

Отсюда

$$t = \frac{q_1}{q_2} \frac{\lambda}{c} + t_2 \left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right) + \frac{q_1}{q_2} t_1. \quad ◀ \ t = 72\ °\text{C} \ ▶.$$

2.27. Уравнение газового состояния

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p, $V = V_0 - M/\rho_0$ и μ — давление, объем и молярная масса пара ($p = 10^5$ Па, $V = 1$ л, $\mu = 18$ г/моль, $T = 373$ К). Отсюда

$$◀ \ m = \frac{pV\mu}{RT} = 0{,}59\ \text{г} \ ▶.$$

2.28. Давление воздуха в котле при 100 °C $p_1=2\cdot10^5$ Па, так как насыщенный водяной пар при этой температуре создает давление $p_2=10^5$ Па. Используя условие неизменности объема (объемом воды, получившейся при конденсации охлаждающегося пара, пренебрегаем, так как он мал), получаем

$$◀\quad p'=p_1\frac{T_2}{T_1}=1{,}5\cdot10^5\ \text{Па}\quad ▶.$$

2.29. 1. Насыщенный пар при 100 °C создает давление, равное атмосферному, $p_0=10^5$ Па. Из уравнения Клапейрона — Менделеева получаем

$$\frac{p_0h}{T_0}=\frac{p(h+x)}{T},$$

где p — давление воздуха под стаканом при 100 °C, $T_0=273$ К, $T=373$ К, x — искомое смещение уровня воды. Равенство давлений на глубине x под водой дает $p_0+p=p_0+\rho gx$, где ρ — плотность пара при 100 °C. Учитывая, что $p_0=\rho gH$ и $H=10^3$ см, получим уравнение

$$x^2+hx-hH\frac{T}{T_0}=0.$$

Окончательно

$$◀\quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{h^2+4hH\frac{T}{T_0}}-h\right)\approx 37\ \text{см}\quad ▶.$$

2. При температуре $t_2=100$ °C давление пара воды $p_2=10^5$ Па $=p_1/3$. Следовательно, парциальное давление воздуха под поршнем станет равным $2p_1/3$. Из уравнения газового состояния найдем новое расстояние x от поршня до поверхности воды ($T_1=279$ К, $T_2=373$ К):

$$\frac{p_1h}{T_1}=\frac{2p_1x}{3T_2},\quad ◀\quad x=\frac{3}{2}\frac{T_2}{T_1}h\approx 2h\approx 4\ \text{см}\quad ▶.$$

2.30. При изменении объема от V до $V/2$ пар сжимается, но не конденсируется. Далее происходит конденсация. Причем давление насыщенного пара при дальнейшем уменьшении объема от $V/2$ до $V/4$ остается постоянным и равным $2p$. Поэтому сконденсируется половина моля пара, то есть ◀ $m=0{,}5\ \nu\mu=9$ г ▶.

2.31. Масса пара равна массе воды под поршнем

$$◀\quad x=h\left(\frac{\rho RT}{\mu p}-1\right)\quad ▶.$$

2.32. Так как пар — насыщенный и конденсируется, то при сжатии его давление постоянно. Работа по сжатию

$$A=F\,\Delta l=pS\,\Delta l=p\,\Delta V=p\,(V-V_0),$$

где V и V_0 — конечный и начальный объемы пара. К пару можно применить уравнение газового состояния:

$$pV_0=\frac{m_0}{\mu}RT,\quad pV=\frac{m}{\mu}RT.$$

Это дает $A=p(V-V_0)=\left(\frac{m-m_0}{\mu}\right)RT$. Отсюда

$$◄\quad \Delta m=\frac{A\mu}{RT}\quad ►.$$

2.33. Количество теплоты $Q=\lambda m$; работа, совершаемая при изотермическом вдвигании поршня,

$$◄\quad A=pV=\frac{m}{\mu}RT=\frac{Q}{\lambda\mu}RT\quad ►.$$

§ 3. Графики для тепловых процессов. Закон сохранения энергии в тепловых процессах

2.34. Участки *1—2* и *3—4* графика (рис. О.2.34) — изобары, описывают процессы, при которых давление газа не изменяется.

Участки *2—3* и *4—1* того же графика — изохоры, описывают процессы, при которых объем газа не изменяется, и поэтому давление прямо пропорционально температуре.

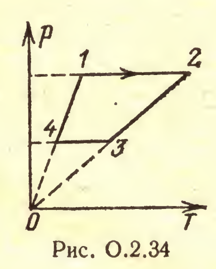


Рис. О.2.34

Рис. О.2.36

2.35. На графике в p, V-координатах цикл имеет вид прямоугольника площади, равной p_0V_0. Уравнение газового состояния:

$$V_0=RT_0/p_0.$$

Работа, совершаемая газом,

$$A=\Delta p\,\Delta V,$$

то есть численно работа A равна площади прямоугольника на графике в p, V-координатах. Таким образом,

$$◄\quad A=p_0V_0=RT_0\quad ►.$$

2.36. Из пропорциональности между p и V на участках *1—2* и *3—4* графика (рис. 2.36) следует, что

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{V_1}{V_2},\qquad \frac{p_3}{p_4}=\frac{V_3}{V_4}.$$

Из изотермичности процессов, описываемых участками *4—1* и *2—3*, следует, что

$$p_1V_1=p_4V_4,\quad p_2V_2=p_3V_3.$$

По условию $V_2=V_4$. Из уравнений получаем

$$\frac{V_1V_3}{V_2V_4}=\frac{V_4V_2}{V_1V_3}, \quad ◀ \ V_3=\frac{V_4V_2}{V_1}=\frac{V_2^2}{V_1} \ ▶.$$

Так как $pV=RT$, то на неизотермических участках, где давление пропорционально объему, температура пропорциональна V^2. Поэтому график процесса имеет в T, V-координатах вид, представленный на рис. О.2.36.

2.37. По условию задачи

$$U_1=cT_1, \quad U_3=cT_3.$$

Из уравнения газового состояния имеем

$$p_1V_1=RT_1, \quad p_2V_2=RT_2.$$

Работу A, совершенную газом, выразим через среднее давление:

$$A=p_{\text{ср}}(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1), \qquad \Delta U=\frac{cp_1}{R}(V_2-V_1).$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$◀ \ \Delta Q=\Delta U+A=(V_2-V_1)\left[\left(\frac{c}{R}+\frac{1}{2}\right)p_1+\frac{p_2}{2}\right] \ ▶.$$

2.38. Начальное и конечное состояния газа имеют одну и ту же температуру, так как величина pV в состояниях 1 и 2 одинакова, то есть внутренняя энергия газа не изменилась. Значит, количество теплоты Q, сообщенное газу, равно работе, совершенной газом:

$$◀ \ Q=A=\left(p+\frac{1}{2}p\right)\frac{1}{2}V=\frac{3}{4}pV \ ▶.$$

2.39. Охлаждение происходит на участке 3—1, причем приращение внутренней энергии

$$U_3-U_1=\frac{3}{2}R(T_2-T_1)=Q-p_1(V_3-V_1),$$

где Q — количество теплоты, отданное газом при охлаждении. Из условия задачи и из уравнения газового состояния следует, что

$$T_3=T_2=\frac{p_2V_1}{R}=\frac{p_1V_3}{R}, \qquad T_1=\frac{p_1V_1}{R}.$$

Окончательно

$$◀ \ Q=\frac{5}{2}V_1(p_2-p_1) \ ▶.$$

2.40. По закону сохранения импульса $mv=(M+m)u$. Разность кинетических энергий в начале движения поршня и в конце, когда колебания затухнут, равна энергии, перешедшей в тепло:

$$m\frac{v^2}{2}-(m+M)\frac{u^2}{2}=\Delta Q=2c\,\Delta T.$$

Отсюда

$$◀ \ \Delta T=\frac{M}{2c(M+m)}\frac{mv^2}{2} \ ▶.$$

2.41. Записывая закон сохранения энергии в системе отсчета, движущейся вправо со скоростью $2v$,

$$2m\frac{v^2}{2}+cT_0=cT,$$

получаем

$$◀\ T=T_0+m\frac{v^2}{c}\ ▶.$$

2.42. Работа $A=mgV_0/S+p_0V_0=c\nu(T-T_0)$, где V_0 — начальный объем газа над перегородкой, ν — число молей газа в сосуде, $T-T_0$ — изменение температуры. По закону Клапейрона — Менделеева $p_0\cdot 2V_0=\nu RT_0$. Таким образом,

$$◀\ T=T_0\left[1+\frac{R\,(mg+p_0S)}{2p_0Sc}\right]\ ▶.$$

2.43. Обозначим через $\nu_{1,2}$ число молей воздуха в первой и второй колбах. Уравнение газового состояния для начального и конечного состояний газа в обеих колбах дает

$$p_1V=\nu_1RT_1,\quad p_2V=\nu_2RT_2=\nu_2RT_1,$$
$$p_1'V=\nu_1'RT_1',\quad p_2'V=p_1'V=\nu_2'RT_2'.$$

По закону сохранения энергии

$$c\,(\nu_1+\nu_2)\,T_1=c\,(\nu_1'T_1'+\nu_2'T_2').$$

Так как количество газа не изменяется, то $\nu_1+\nu_2=\nu_1'+\nu_2'$. Отсюда $p_1+p_2=2p$, $2/T_1=1/T_1'+1/T_2'$. Окончательно

$$◀\ T_2'=\frac{T_1}{2-T_1/T_1'}\ ▶.$$

2.44. Число молей газа в нижней и верхней частях сосуда

$$\nu_1=\frac{phS}{RT}\quad\text{и}\quad \nu_2=\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)\frac{hS}{RT}.$$

После того как убрали перегородку, давление во всем сосуде стало равно p_0+mg/S. Тогда, используя уравнение газового состояния, получаем

$$\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)(2h-x)\,S=(\nu_1+\nu_2)\,RT_2=\left(p_0+p+\frac{mg}{S}\right)hS\frac{T_2}{T_1},$$

$$p\,\Delta V=\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)Sx=c\,(\nu_1+\nu_2)\,(T_2-T_1)=$$
$$=\frac{c}{R}hS\left(p_0+p+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right).$$

Из этих уравнений получаем

$$◀\ x=h\frac{c}{c+R}\,\frac{p_0-p+mg/S}{p_0+mg/S}\ ▶.$$

2.45. Пусть x — изменение длины пружины после того, как поршень отпустили, то есть x — новое расстояние между поршнем и

правым торцом сосуда. Тогда из закона сохранения энергии:

$$\varkappa l^2/2+cT_1=\varkappa x^2/2+cT_2;$$

из уравнения газового состояния:

$$p_1\frac{Sl}{T_1}=p_2\frac{Sx}{T_2},$$

из условия равновесия: $p_2S=\varkappa x$. Совместное решение этих уравнений дает

$$◀\ T_2=T_1\frac{2cT_1-\varkappa l^2}{2cT_1+p_1Sl}\ ▶.$$

2.46. Пока поршень неподвижен, уравнение газового состояния:

$$p_0hS=RT_0.$$

После начала движения поршня сила натяжения нити на поршень не действует, тогда уравнение газового состояния:

$$\left(p+\frac{mg}{S}\right)2hS=RT;$$

из закона сохранения энергии:

$$Q=c\,(T-T_0)+mgh+phS.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$◀\ Q=mgh\,(1+2c/R)+(c+R)\,T\ ▶.$$

2.47. Количество теплоты Q переходит во внутреннюю энергию газа при нагреве его до температуры T' и в работу A по расширению газа:

$$Q=\Delta U+A=c\,(T'-T)+p\,\Delta V,$$

где $\Delta V=2V-V=V$.

Из уравнения Клапейрона — Менделеева, записанного для начального и конечного состояний газа, следует, что

$$(p/2)\,V=RT,\quad p\cdot 2V=RT'.$$

Отсюда $T'=4T$. Работа $A=p\,\Delta V=pV=RT'/2=2RT$. Приращение внутренней энергии $\Delta U=c(T'-T)=3cT$. Тогда окончательно ◀ $Q=(3c+2R)T$ ▶.

2.48. По закону сохранения энергии имеем

$$Q=\frac{m}{\mu}c\,\Delta T+M\frac{v^2}{2},$$

где $Mv^2/2=Fl=pSl$, так как ускорение поршня постоянно, то и давление p постоянно. Уравнение газового состояния для постоянного давления дает

$$p\,\Delta V=\frac{m}{\mu}R\,\Delta T.$$

Таким образом,

$$Q=\frac{m}{\mu}c\,\Delta T+p\,\Delta V=\frac{m}{\mu}c\,\Delta T+\frac{m}{\mu}R\,\Delta T=\frac{m}{\mu}(c+R)\,\Delta T.$$

Отсюда

$$\Delta T = \frac{Q\mu}{(c+R)\,m} \quad \text{и} \quad Q = \frac{Qc}{c+R} + M\frac{v^2}{2}.$$

Окончательно

$$◀ \quad Q = \frac{Mv^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right) \quad ▶.$$

2.49. Пока поршень покоится, все тепло идет на нагрев газа: $\Delta U = c\,(T - T_0) = Q$. ◀ $T = Q/c + T_0$ при $T \leqslant T_{кр}$ ▶.

Найдем, используя условие равновесия и закон Шарля, критическую температуру $T_{кр}$, при превышении которой поршень начнет двигаться:

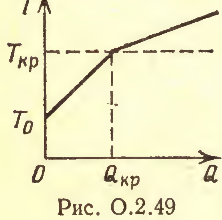


Рис. О.2.49

$$(p_{кр} - p_0)\,S = f, \quad \frac{p_{кр}}{T_{кр}} = \frac{p_0}{T_0}.$$

Отсюда

$$T_{кр} = \left(1 + \frac{f}{p_0 S}\right) T_0, \quad Q_{кр} = \frac{cT_0 f}{p_0 S}.$$

Запишем закон сохранения энергии (первое начало термодинамики):

$$Q - Q_{кр} + A_{тр}/2 = c\,(T - T_{кр}) + p_{кр}\,(V - V_0),$$

где

$$\frac{A_{тр}}{2} = \frac{f}{2S}\,(V - V_0) = \frac{p_{кр}}{2}\,(V - V_0).$$

Таким образом, $Q - Q_{кр} = c\,(T - T_{кр}) + (p_{кр}/2)\,(V - V_0)$. Так как $p_{кр}V = RT$, $p_{кр}V_0 = RT_{кр}$, то $(p_{кр}/2)\,(V - V_0) = (R/2)\,(T - T_{кр})$. Окончательно

$$◀ \quad Q - Q_{кр} = (T - T_{кр})\,(c + R/2) \quad \text{при} \quad T > T_{кр},$$
$$T = T_{кр} + (Q - Q_{кр})/(c + R/2) \quad \text{при} \quad T > T_{кр} \quad ▶.$$

График зависимости T от Q оказался ломаной линией (рис. О.2.49), состоящей из двух отрезков прямой. Точка излома

$$Q_{кр} = cT_0 f/p_0 S, \quad T_{кр} = (1 + f/p_0 S)\,T_0.$$

Глава III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 1. Напряженность, потенциал и энергия электростатического поля

3.1. Второй закон Ньютона для электрона, движущегося по окружности радиуса r с постоянной угловой скоростью ω, можно записать в виде

$$m\omega^2 r = eE,$$

где E — напряженность электрического поля, возникающего в проводнике на расстоянии r от оси цилиндра в результате смещения электронов. Окончательно

$$◀ \; E=\frac{m\omega^2 r}{e} \; ▶.$$

3.2. Для вычисления силы натяжения T достаточно записать условие равновесия нижнего шарика:

$$mg+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot l^2}=T+\frac{4\pi r^3}{3}\rho g.$$

Таким образом,

$$◀ \; T=mg+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot l^2}-\frac{4\pi r^3}{3}\rho g \; ▶.$$

3.3. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{q_2^2 4l^2\cos^2(\alpha/2)}{q_1^2 4l^2\sin^2(\alpha/2)}$, ◀ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{2/3}$ ▶.

3.4. Заметим, что силы упругости кольца компенсируют нормальные составляющие сил электростатического взаимодействия.

1. ◀ $q_1=q_2=\pm\sqrt{3\sqrt{3}\cdot 4\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2}$

или

$$q_1=-q_2, \quad q_1q_2=-3\sqrt{3}\cdot 4\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2 \; ▶.$$

2. ◀ $Q=q-3\sqrt{3}\cdot 4\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2/q$

или

$$Q=q+3\sqrt{3}\cdot 4\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2/q \; ▶.$$

3. ◀ $q_3=q_4=\frac{\sqrt{2}\cdot 8\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2}{q_1-q_2}$ ▶.

4. ◀ $q_1=-q_2=q-8\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2/q$

или

$$q_1=q_2=q+8\pi\varepsilon_0\cdot mgR^2/q \; ▶.$$

3.5. $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, ◀ $T=\left[m^2g^2+\left(\frac{\sigma q}{2\varepsilon_0}\right)^2\right]^{1/2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sigma q}{2mg\varepsilon_0}$ ▶.

3.6. Введем поверхностную плотность заряда на внешней и внутренней поверхностях плит (внутри проводящих плит поля нет): σ_1', σ_1'' и σ_2', σ_2''.

Из закона сохранения заряда:

$$\sigma_1=\sigma_1'+\sigma_1'', \quad \sigma_2=\sigma_2'+\sigma_2''.$$

Из-за отсутствия поля внутри металла:

$$\sigma_1'=\sigma_2', \quad \sigma_1''=-\sigma_2''.$$

Отсюда имеем

$$◀ \; \sigma_1'=\sigma_2'=(\sigma_1+\sigma_2)/2, \quad \sigma_1''=-\sigma_2''=(\sigma_1-\sigma_2)/2 \; ▶.$$

3.7. Прочность прямо пропорциональна площади сечения прово локи, то есть квадрату ее диаметра. Сила натяжения, обусловленная кулоновским взаимодействием, обратна квадрату диаметра коль-

ца и прямо пропорциональна квадрату заряда (это видно из закона Кулона, в частности по соотношению размерностей). Таким образом, увеличив диаметр кольца и проволоки втрое и оставив заряд его без изменения, уменьшим тем самым в 9 раз силу натяжения и в 9 раз увеличим прочность. Поэтому разрыв нового кольца произойдет при увеличении заряда в 9 раз ($D_{1,2}$ — диаметр кольца, $d_{1,2}$ — диаметр проволоки):

$$\frac{q_1^2/D_1^2}{q_2^2/D_2^2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}, \quad ◀ \ \frac{q_2}{q_1}=\frac{d_2D_2}{d_1D_1}=9 \ ▶.$$

3.8. Из принципа суперпозиции ◀ $\varphi=2\varphi_0$, $E=\sqrt{2}E_0$ ▶.

3.9. После соединения шаров *1* и *2* заряды на них одинаковы и равны $q/2$. После соединения шаров *2* и *3* заряды на них одинаковы и равны $q/4$. Если пренебречь влиянием заряда шара *2* на заряд шаров *1* и *3*, то после соединения шаров *1* и *3* заряды на них

$$q_1=q_3=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}+\frac{q}{4}\right)=\frac{3q}{8}$$

и искомое отношение

$$◀ \ q_1:q_2:q_3=3:2:3 \ ▶.$$

Если учесть влияние заряда шара *2* на заряд шаров *1* и *3*, то

$$\frac{q_1-\Delta q}{r}+\frac{q_2}{l}=\frac{q_3+\Delta q}{r}+\frac{q_2}{l\sqrt{2}}, \quad \Delta q=\frac{q}{8}\left[1+\frac{r}{l}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right];$$

$$◀ \ q_1:q_2:q_3=\left[\frac{3}{8}-\frac{r}{l}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]:\frac{1}{4}:\left[\frac{3}{8}+\frac{r}{l}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \ ▶.$$

3.10. Потенциал заземленной сферы равен нулю, в частности он равен нулю в центре сферы, там он создается суммой потенциалов зарядов q, $-q$ и индуцированного заряда Q сферы:

$$\frac{Q}{r}+\frac{q}{l_1}-\frac{q}{l_2}=0.$$

Отсюда $Q=qr(1/l_2-1/l_1)$.

Заряды *1* и *2* действуют на сферу с силами

$$F_1=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\cdot l_1^2}=\frac{q^2r}{4\pi\varepsilon_0\cdot l_1^2}\left(\frac{1}{l_2}-\frac{1}{l_1}\right),$$

$$F_2=-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\cdot l_2^2}=-\frac{q^2r}{4\pi\varepsilon_0\cdot l_2^2}\left(\frac{1}{l_2}-\frac{1}{l_1}\right).$$

Суммарная сила, действующая на сферу,

$$◀ \ F=(F_1^2+F_2^2)^{1/2}=\frac{q^2r}{4\pi\varepsilon_0\cdot l_1^2l_2^2}\left(\frac{1}{l_2}-\frac{1}{l_1}\right)(l_1^4+l_2^4)^{1/2} \ ▶.$$

$$◀ \ \operatorname{tg}\alpha=F_1/F_2=-l_2^2/l_1^2 \ ▶.$$

3.11. После первого заземления второго шара и его последующей изоляции, исходя из равенства нулю потенциала в центре

заземленного шара ($\varphi_1+\varphi_2=q_1/(4\pi\varepsilon_0\cdot r)+q/(4\pi\varepsilon_0\cdot l)=0$), имеем

$$\frac{q}{l}+\frac{q_1}{r}=0,\quad q_1=-\frac{qr}{l},\quad -\frac{qr}{l^2}+\frac{q_2}{r}=0,\quad q_2=\frac{qr^2}{l^2},$$

откуда

$$\frac{q_1}{q_2}=-\frac{l}{r}.$$

После повторения всей процедуры заземления и изоляции шаров имеем

$$\frac{q_1'}{r}+\frac{qr^2}{l^3}=0,\quad q_1'=-\frac{qr^3}{l^3},\quad \frac{q_2'}{r}-\frac{qr^3}{l^4}=0,\quad q_2'=\frac{qr^4}{l^4},$$

откуда

$$\frac{q_1'}{q_2'}=-\frac{l}{r}.$$

Таким образом, искомое соотношение ◀ $q_1/q_2=-l/r$ ▶. Результат может быть получен сразу при рассмотрении последнего заземления второго шара: $q_2'/r+q_1'/l=0$.

3.12. Электрическое поле в данном случае сферически симметрично. Внутри заземленной сферы поле равно нулю, значит, потенциал в этой области (в частности, в центре) одинаков и такой же, как и на поверхности внутренней сферы, то есть равен нулю. Учтем, что этот потенциал создается зарядами на внешней и внутренних сферах. Потенциалы складываются алгебраически, поэтому, разбивая заряды, находящиеся на поверхности сфер, на малые доли так, чтобы можно было для каждой доли пользоваться формулой потенциала точечного заряда, имеем для центра сфер

$$\frac{\Delta q_1}{R}+\ldots+\frac{\Delta q_n}{R}+\frac{\Delta Q_1}{r}+\ldots+\frac{\Delta Q_N}{r}=0,$$

$$\Delta q_1+\ldots+\Delta q_n=q,\quad \Delta Q_1+\ldots+\Delta Q_N=Q,$$

то есть $q/R+Q/r=0$, $Q=-qr/R$, где Q — заряд на внутренней сфере.

Напряженность поля на внешней сфере создается обоими зарядами q и Q так, как если бы они были точечными и были помещены в центр системы. Это можно увидеть, например, с помощью картины линий напряженности электрического поля. Таким образом, на расстоянии l от центра

$$◀\ E=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0\cdot l^2}=\frac{q\,(1-r/R)}{4\pi\varepsilon_0\cdot l^2}\ ▶.$$

3.13. Второй закон Ньютона дает

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{3\sqrt{2}-4}{4\sqrt{2}}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2},$$

$$◀\ v=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}\,\frac{3\sqrt{2}-4}{4\sqrt{2}m}\right)^{1/2}\ ▶.$$

3.14. Полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий обеих частиц: $W_к = 2W'_к$. Второй закон Ньютона дает

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4r^2},$$

где $2r$ — расстояние между электроном и позитроном. Тогда кинетическая и потенциальная энергия системы:

$$W_к = 2m\frac{v^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 8r}, \quad W_п = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2r}.$$

Таким образом, ◀ $W_п/W_к = -2$ ▶.

Тонкость и трудность задачи в том, что источник электростатического взаимодействия здесь не расположен в центре вращения.

3.15. Введем расстояние между частицами r и заряд каждой из них q и $-q$. Частицы будут двигаться вокруг общего центра масс по окружностям радиуса

$$r_1 = r\frac{m_2}{m_2 + m_1} \quad \text{и} \quad r_2 = r\frac{m_1}{m_2 + m_1}$$

со скоростями v_1 и v_2 такими, что

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

На основании второго закона Ньютона

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{m_1 v_1^2}{r} = \frac{m_1(m_2 + m_1)}{m_2 r} v_1^2.$$

Отсюда

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} = \frac{m_1(m_2 + m_1) v_1^2}{m_2}.$$

Пусть скорость одной частицы увеличили в n раз. Тогда на основании закона сохранения импульса обе частицы будут продолжать двигаться даже при наименьшем n с некоторой скоростью u после удаления друг от друга на очень большое расстояние (их относительная скорость в этом случае равна нулю).

Закон сохранения импульса даст уравнение

$$m_1(n-1)v_1 = (m_2 + m_1)u.$$

По закону сохранения энергии

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} + \frac{m_1 n^2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Подставляя в это уравнение v_2, r и u из предыдущих уравнений, получаем квадратное уравнение для n:

$$n^2 + \frac{2m_1}{m_2}n - \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 4\frac{m_1}{m_2} + 2\right] = 0,$$

откуда

$$◀ \; n = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left[\sqrt{2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - 1\right] \; ▶.$$

Ошибочным было бы рассмотрение движения частиц без учета движения центра масс.

3.16. Выражая кинетическую и потенциальную энергию атома через заряд электрона и диаметр атома, вычисляем полную энергию атома W. Работа по ионизации атома равна полной энергии W, взятой с противоположным знаком:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot d}, \quad W_п = -\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot d},$$

$$W = W_к + W_п = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot d}, \quad \blacktriangleleft\ A = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot d} = 14\ эВ\ \blacktriangleright.$$

3.17. По закону сохранения импульса ($mv \sin\alpha = \mathrm{const}$) и энергии

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l} + 2\frac{mv^2\cos^2\alpha}{2} + 2\frac{mv^2\sin^2\alpha}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_{\min}} + 2\frac{mv^2\sin^2\alpha}{2}$$

получаем $\blacktriangleleft\ r_{\min} = l\,[1 + (lmv^2\cos^2\alpha)4\pi\varepsilon_0/e^2]^{-1}\ \blacktriangleright$.

3.18. $L = AC = l\,[(1+\sin\alpha)^2 + (1-\cos\alpha)^2]^{1/2} = l\sqrt{3}$. Второй закон Ньютона в нижней точке дает

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg.$$

Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\,(1-\cos\alpha) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot L}.$$

Таким образом,

$$\blacktriangleleft\ T = mg\,(3-\sqrt{2}) + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l^2}\ \blacktriangleright.$$

3.19. Из закона сохранения энергии находим скорость шарика на конце спицы:

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+2l\cos\alpha}\right) - 2mgl\sin\alpha.$$

Высота подъема определяется только вертикальной составляющей скорости шарика на конце спицы:

$$h = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} + l\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\blacktriangleleft\ h = l\,(\sin\alpha)\cos^2\alpha + \frac{q^2 l\cos\alpha\sin^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cdot mgL\,(L+2l\cos\alpha)}\ \blacktriangleright.$$

3.20. Средний шарик будет покоиться, а скорость крайних найдем из закона сохранения энергии:

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2l} + 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l}.$$

Отсюда получаем

$$◀\ v = q\sqrt{\frac{5}{2lm}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\ ▶.$$

3.21. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l} + \frac{\varkappa l^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4l} + \frac{\varkappa 4l^2}{2}.$$

Отсюда

$$◀\ \varkappa = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2l^3}\ ▶.$$

3.22. Скорость максимальна при равенстве сил трения и электростатического взаимодействия:

$$kmg = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}.$$

Из закона сохранения энергии:

$$2m\frac{v^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{x}\right) - kmg\,(x - l).$$

Окончательно имеем

$$◀\ v_{max} = \left[kgl + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot ml} - 2q\sqrt{\frac{kg}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m}}\right]^{1/2}\ ▶$$

3.23. По закону сохранения энергии

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l_0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l} + kmg\,(l - l_0).$$

Отсюда однозначно (второй корень уравнения не годится)

$$◀\ l = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot mgkl_0}\ ▶.$$

3.24. Скорости окажутся максимальными в момент t, когда все три заряда окажутся на одной прямой. При этом электрические силы будут скомпенсированы силами натяжения нити. Скорости частиц будут перпендикулярны нитям. Обозначим через v_1 скорость среднего заряда, а через v_2 — скорости крайних зарядов. Из соображений симметрии и с учетом законов сохранения импульса и энергии имеем

$$mv_1 = 2mv_2, \quad m\frac{v_1^2}{2} + 2m\frac{v_2^2}{2} = \Delta W_{эл},$$

$$\Delta W_{эл} = W_{нач} - W_{кон}, \quad \text{где} \quad W_{нач} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l},$$

$$W_{кон} = \left(\frac{2q^2}{l} + \frac{q^2}{2l}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{5}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot l}.$$

Отсюда

$$\Delta W_{эл} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2l}.$$

Таким образом,

$$◀ \quad v_1=\frac{2q}{(4\pi\varepsilon_0\cdot 6ml)^{1/2}}, \quad v_2=\frac{q}{(4\pi\varepsilon_0\cdot 6ml)^{1/2}} \quad ▶.$$

3.25. Частица должна дойти до такой точки, где силы, действующие на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2, равны; тогда в дальнейшем притягивающее действие заряда q_1 окажется сильнее:

$$\frac{q_3q_2}{(l+r)^2}=\frac{q_3q_1}{r^2}, \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{l}\left(\sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}}-1\right),$$

$$\frac{1}{r+l}=\frac{1}{l}\left(1-\sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}}\right).$$

Из закона сохранения энергии:

$$4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{mv^2}{2}=\frac{q_3q_2}{l+r}-\frac{q_3q_1}{r}=\frac{q_3}{l}\left(q_1+q_2-2\sqrt{|q_1||q_2|}\right)=$$

$$=\frac{q_3\left(\sqrt{|q_2|}-\sqrt{|q_1|}\right)^2}{l},$$

$$◀ \quad v=\left[\frac{2q_3}{4\pi\varepsilon_0\cdot ml}\left(\sqrt{|q_2|}-\sqrt{|q_1|}\right)\right]^{1/2} \quad \text{при} \quad |q_2|>|q_1|,$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad |q_2|\leqslant|q_1| \quad ▶.$$

3.26. Для падения на землю шарику достаточно достичь с нулевой скоростью точки, где его ускорение равно нулю (силы уравновешены). Равенство сил дает

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}+mg=0.$$

Из закона сохранения энергии:

$$mg(r-l)-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot l}+\frac{mv^2}{2}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}, \quad r=\frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0\cdot mg}}.$$

Отсюда

$$◀ \quad v_{\min}=\sqrt{2gl}\left[1-\frac{q}{l\sqrt{4\pi\varepsilon_0\cdot mg}}\right] \quad ▶.$$

3.27. Запишем равенство отношений величины $F\,\Delta t$ к изменению импульса шарика при упругих ударах шарика о внутреннюю и внешнюю сферы. Время соударения различных шариков Δt будем считать одинаковым. Тогда

$$\frac{p\cdot 4\pi r^2}{2mv}=\frac{p'\cdot 4\pi R^2}{2mv'}.$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv'^2}{2}=W_к+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Таким образом,

$$◀ \quad p'=p\left(\frac{r}{R}\right)^2\left[1+\frac{q_1q_2(R-r)}{4\pi\varepsilon_0\cdot W_к rR}\right]^{1/2} \quad ▶.$$

3.28. Энергия цепочки

$$W_1=\left(\frac{q^2}{6r}+\frac{2q^2}{4r}+\frac{3q^2}{2r}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{13q^2}{6r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Энергия тетраэдра

$$W_2=\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}.$$

Искомая работа

$$◀\ A=\frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot 6r}=0{,}07 \text{ Дж}\ ▶.$$

3.29. Из закона сохранения энергии имеем

$$m\frac{v_0^2}{2}=m\frac{v^2}{2}-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r},$$

так как потенциал в центре шара равен $q_1/(4\pi\varepsilon_0\cdot r)$. Окончательно

$$◀\ v=\left(v_0^2+\frac{2q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot mr}\right)^{1/2}\approx 4 \text{ м/с}\ ▶.$$

3.30. Чтобы пролететь сквозь кольцо, частице достаточно достичь его центра со скоростью, равной скорости кольца, где потенциал равен $q_2/(4\pi\varepsilon_0\cdot r)$. Законы сохранения импульса и энергии дают

$$m_1v_0=(m_1+m_2)\,v,\quad \frac{m_1v_0^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)\,v^2}{2}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}.$$

Отсюда

$$◀\ v_{0\,\min}=\left[\frac{2q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right]^{1/2}▶.$$

Решение можно получить иначе, если сразу перейти в систему центра масс.

3.31. Из закона сохранения энергии и импульса имеем

$$m_2\frac{v^2}{2}=m_1\frac{v_1^2}{2}+m_2\frac{v_2^2}{2}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r},\qquad m_2v=m_1v_1+m_2v_2;$$

$$t=\frac{2r}{v_2-v_1}.$$

Поскольку поле внутри шара отсутствует, то заряд движется по инерции с относительной скоростью v_2-v_1. Таким образом,

$$◀\ t=2r\left[v^2-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{2q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot rm_2}\right]^{-1/2},\quad \frac{m_2m_1}{m_1+m_2}\frac{v^2}{2}>\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}\ ▶.$$

3.32. Пусть l_i — длины пролетных трубок, v_i — соответствующие скорости частиц в трубках, $i=1, 2, \ldots, n$. Электрическое поле внутри металлической трубки равно нулю и частица летит по инерции:

$$\frac{mv_1^2}{2}=eU,\qquad \frac{mv_2^2}{2}=eU+\frac{mv_1^2}{2}=2eU,\qquad \frac{mv_i^2}{2}=ieU.$$

Условие равенства времен пролета частицей трубок дает $\frac{l_i}{v_i}=\frac{l}{v_1}$. Окончательно ◀ $l_i=l\frac{v_i}{v_1}=l\sqrt{i}$, $i=1, 2, \ldots, n$ ▶.

3.33. Чтобы пролететь сквозь правую сферу, частице достаточно достигнуть левого отверстия на этой сфере. Потенциальная энергия заряда в центре системы равна $q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0\cdot r)$, а в левом отверстии— $(4/3)q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0\cdot r)$. Таким образом, условие пролета из энергетических соображений может быть записано в следующем виде:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}>\frac{4}{3}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r}.$$

Таким образом,

$$◀\ v_{\min}=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot rm}}\ ▶.$$

3.34. Между сферами частица остановиться не может: ближняя сфера тянет ее к себе сильнее. Рассмотрим случай остановки частицы внутри одной из сфер. По закону сохранения энергии

$$-\frac{2q_1q_2}{l}=-\frac{q_1q_2}{r}-\frac{q_1q_2}{x+l},$$

где q_1 — заряд сферы, q_2—заряд частицы. Таким образом, $x=0{,}3r$. Для случая остановки частицы за сферой (то есть, когда $x>1{,}2r+r$) получаем

$$-\frac{2q_1q_2}{l}=-\frac{q_1q_2}{x-l}-\frac{q_1q_2}{x+l},$$

откуда $x=2{,}1r$, но x должен быть не меньше $2{,}2r$. Следовательно, этот вариант не проходит и окончательно ◀ $x=0{,}3r$ ▶.

3.35. Максимальная скорость шара достигается в положении равновесия. Из законов сохранения импульса и энергии имеем

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot l}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2l}=\frac{mv^2}{2}+2\frac{mu^2}{2}=2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot 1{,}5l},$$

$$2mu+mv=0,$$

где v и u — скорости незакрепленного и закрепленных шаров в момент, когда незакрепленный шар находится посередине спицы. Таким образом,

$$◀\ v_{\max}=\sqrt{\frac{2}{9}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot lm}}\ ▶.$$

3.36. Из закона сохранения импульса:

$$mu=2mv.$$

Условие разрыва нити:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot x^2}=T.$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mu^2}{2}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot x}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot 10r}.$$

Окончательно

$$◀\ v=\left[\frac{q'^2}{2m}\left(\frac{\sqrt{T}}{q'}-\frac{1}{10r}\right)\right]^{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{\sqrt{T}}{q'}\leqslant\frac{1}{2r};$$

$$v=\left(\frac{q'^2}{m\cdot 5r}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{\sqrt{T}}{q'}>\frac{1}{2r}\ ▶,$$

где $q'=q/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$.

§ 2. Электрическая емкость. Конденсаторы

3.37. Так как пластины замкнуты, то они имеют один и тот же потенциал, то есть поле внутри конденсатора равно нулю. Это значит, что на пластинах появились заряды, создавшие поле, напряженность которого равна по модулю и противоположна по направлению напряженности внешнего поля. Зная напряженность поля, вычислим заряд:

$$◀\ q=UC=\varepsilon_0 ES=0{,}9\cdot 10^{-10}\ \text{Кл}.$$

Заряд на одной пластине равен q, на другой $-q$ ▶.

3.38. Проще всего удовлетворить условию задачи, пронеся одну пластину мимо другой по кратчайшему пути и расположив их на расстоянии d одну от другой (могут быть и другие перемещения). При этом работа по взаимодействию зарядов с полем неподвижной пластины по ту и другую сторону от нее компенсируется. Остается лишь вклад внешнего поля: ◀ $A=-qE\cdot 2d$ ▶. Можно найти работу и через энергию системы:

$$A=W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}}=C\,(E-E_{\text{конд}})^2\,\frac{d^2}{2}-C\,(E+E_{\text{конд}})^2\,\frac{d^2}{2},$$

$$◀\ A=-2CEE_{\text{конд}}\,d^2=-2qEd\ ▶.$$

3.39. В электрическом поле на плоскостях пластины наводятся заряды q и $-q$ такие, чтобы внутри пластины поле было равно нулю. Поэтому $q=UC=EdC$. При включении поля происходит постепенная разрядка возникшего во внешнем поле заряженного конденсатора, при этом вся энергия конденсатора переходит в тепло:

$$◀\ Q=\frac{4\pi\varepsilon_0 E^2 Sd}{8\pi}=\frac{\varepsilon_0 E^2 Sd}{2}\ ▶.$$

Закон сохранения энергии позволяет при решении избежать детализации процессов, происходящих при переходе из начального состояния в конечное.

3.40. При удалении пластины заряды стекают на пластины другого конденсатора. Поэтому

$$q=CU,\quad 2q=C\cdot 2U,\quad ◀\ U'=2U,\quad W=4U^2\,\frac{C}{2}=2CU^2\ ▶.$$

3.41. Через время t высота электрона над плоскостью AB $y=at^2/2$, где a — его ускорение, а вертикальная составляющая скорости $v_y=at$. Через время l/v_0-t координата $y=0$, то есть

$$\frac{at^2}{2}+at\left(\frac{l}{v_0}-t\right)-\frac{a}{2}\left(\frac{l}{v_0}-t\right)^2=0.$$

Однозначно, так как $t<l/v_0$, получаем

$$◄\ t=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\frac{l}{v_0}\ ►.$$

3.42. Пусть ускорение и время движения частицы между пластиной A и сеткой равны a_1 и t_1, а между сеткой и пластиной B равны a_2 и t_2. Потенциалы $\varphi_A=0$, $\varphi_G=\varphi$, $\varphi_B=3\varphi$, ускорения $a_2=2a_1=2e\varphi/ml$. Тогда для движения частицы из высшей точки траектории имеем $a_2t_2^2/2=l/2$. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}\cos^2\alpha+2e\varphi.$$

Условие равенства нулю вертикальной составляющей скорости в высшей точке дает

$$v_0\sin\alpha-a_1t_1-a_2t_2=0.$$

Искомая длина

$$◄\ L=(v_0\cos\alpha)\cdot 2(t_1+t_2)=2\left(4-\sqrt{2}\right)l\operatorname{ctg}\alpha\ ►,$$

3.43. Ток прекратится, когда потенциал сетки G_1 из-за осевших на ней электронов станет равным потенциалу катода, то есть нулевым. Так как тока нет, всю систему электродов можно рассматривать как систему плоских конденсаторов. В частности, анод, две поверхности сетки G_1 и сетка G_2 образуют два конденсатора. Искомый заряд q равен сумме зарядов этих конденсаторов: $q=q_1+q_2$, где $q_1=-U_1C_1$, $q_2=-U_2C_2$. Следовательно,

$$◄\ q=-\varepsilon_0S\left(\frac{U_1}{l-d_1}+\frac{U_2}{d_1-d_2}\right)\ ►.$$

3.44. $\varphi_A=\mathcal{E}/2$, $\varphi_B=2\mathcal{E}/3$ или $\varphi_B=\mathcal{E}/3$ в зависимости от расположения конденсатора емкости $2C$. Окончательно

$$◄\ \varphi_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=\pm\,\mathcal{E}/6=\pm\,1\ \text{В}\ ►.$$

3.45. При сведении схемы к более простой эквивалентной нетрудно заметить, что трижды повторяется один и тот же элемент, который понижает напряжение вдвое. Таким образом, искомая разность потенциалов ◄ $U_{DF}=2$ В ►.

3.46. Пусть число пластин $i=4$, тогда $C=3\varepsilon_0S/d$ (три параллельных конденсатора), аналогично при $i=6$ $C=5C_0$, где $C_0=\varepsilon_0S/d$, и т. д. Окончательно, когда полное число пластин равно $2n$, ◄ $C=(2n-1)\,C_0=(2n-1)\varepsilon_0S/d$ ►.

3.47. Потенциал шара и ближайшей к нему пластины одинаков, потенциал заземленной пластины равен нулю. Так как потенциал

бесконечно удаленной точки равен нулю, а шар по условию задачи удаленный, фактически шар и конденсатор оказались соединенными параллельно:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}=\frac{q_0-q}{C}, \quad ◀ \; q=\frac{q_0}{1+C/(4\pi\varepsilon_0 \cdot r)} \; ▶.$$

3.48. Заряд внутренних обкладок конденсаторов равен нулю, их общий потенциал обозначим U_1. Тогда $q_2=q_1+q_3$ и $C_2(U-U_1)=$ $=C_1U_1+C_3U_1$. Отсюда

$$◀ \; q_{1,3}=\frac{UC_2C_{1,3}}{C_1+C_2+C_3}, \quad q_2=\frac{U(C_1+C_3)C_2}{C_1+C_2+C_3} \; ▶.$$

3.49. Заряд на конденсаторе емкости C_1 в положении *1* ключа: $q_0=C_1\mathscr{E}_1$. Когда ключ находится в положении *2*, получаем $U_1+U_2=\mathscr{E}_2$, $q_1+q_2=-q_0$, то есть $C_1U_1-C_2U_2=-C_1\mathscr{E}_1$. Отсюда

$$◀ \; U_1=\frac{\mathscr{E}_2C_2-\mathscr{E}_1C_1}{C_1+C_2} \; ▶.$$

3.50. Емкость батареи конденсаторов, подключенных к конденсатору *1*, равна $2C$. Для напряжений на конденсаторах имеем $U_4=U_1=2U_2=2U_3=2U_5=2U_6$. Окончательно

$$◀ \; q_1=q_4=UC/3, \quad q_2=q_3=q_5=q_6=q_4/2=UC/6 \; ▶.$$

3.51. Пусть конденсатор заряжен и разность потенциалов на нем равна U. Тогда при очередном замыкании ключа в положение *1* через резистор с сопротивлением R_1 в начальный момент пойдет ток $I_1=(\mathscr{E}_1-U)/R_1$. За время включения заряд конденсатора изменится на $\Delta q=I_1\tau$, где τ — время включения. Когда ключ замкнут в положении *2*, через резистор с сопротивлением R_2 идет ток $I_2=$ $=(\mathscr{E}_2-U)/R_2$.

Так как U — установившееся напряжение, то $I_1\tau=-I_2\tau$, то есть после двух переключений заряд на конденсаторе остается без изменения:

$$\frac{\mathscr{E}_1-U}{R_1}=-\frac{\mathscr{E}_2-U}{R_2},$$

отсюда

$$U=\frac{\mathscr{E}_2R_1+\mathscr{E}_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Искомый заряд

$$◀ \; q=CU=C\frac{\mathscr{E}_2R_1+\mathscr{E}_1R_2}{R_1+R_2} \; ▶.$$

3.52. При зарядке конденсатора

$$U_0=I_1R_1+U_C=I_1R_1+I_2R_2, \quad \Delta q=(I_1-I_2)\tau;$$

при его разрядке

$$\Delta q=\frac{U_C}{R_2}(T-\tau); \quad (I_1-I_2)\tau-\frac{U_C}{R_2}(T-\tau)=0,$$

откуда

$$U_C = I_2 R_2, \quad I_1 = I_2 \frac{T}{\tau}, \quad U_0 = I_2 \left(R_1 \frac{T}{\tau} + R_2 \right).$$

Окончательно

$$◄ \; U_C = U_0 R_2 \frac{\tau}{R_1 T + R_2 \tau} \; ►.$$

3.53. По закону сохранения заряда $q_1 - q_2 = q_1' - q_2'$, $q_2 - q_3 = q_2' - q_3'$. Если провести вдоль цепи единичный заряд, вернувшись в первоначальную точку, то работа по перемещению этого заряда будет равна нулю. Это дает

$$0 = 1 \cdot (U_1 + U_2 + U_3) = \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} + \frac{q_3}{C}.$$

$$◄ \; q_1' = \frac{1}{3}(2q_1 + q_2 - q_3), \quad q_2' = \frac{1}{3}(2q_2 + q_3 - q_1),$$

$$q_3' = \frac{1}{3}(2q_3 + q_1 - q_2) \; ►.$$

3.54. В первом и втором случаях (рис. О.3.54) конденсаторы оказываются соединенными так, что для разностей потенциалов на

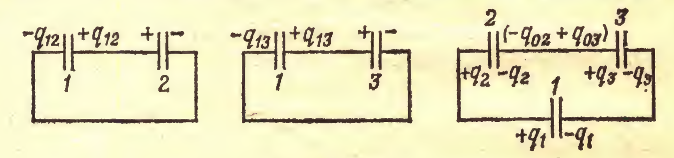


Рис. О.3.54

конденсаторах получаем следующие соотношения:

$$\frac{q_{12}}{C_1} = \frac{q_{02} - q_{12}}{C_2}, \quad \frac{q_{13}}{C_1} = \frac{q_{03} - q_{13}}{C_3},$$

где q_{02} и q_{03} — первоначальные заряды на конденсаторах *2* и *3*. Для третьего случая из закона сохранения заряда следует, что

$$q_2 + q_1 = q_{02}, \quad -q_3 - q_1 = -q_{03}.$$

На конденсаторе *1* после соединения с конденсаторами *2* и *3* разность потенциалов оказывается равной суммарной разности потенциалов на заряженных конденсаторах *2* и *3*:

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}.$$

Заметим, что у соединенных между собой конденсаторов *2* и *3* суммарный заряд $q_3 - q_2 = q_{03} - q_{02}$ на внутренних обкладках отличен от нуля. Отсюда

$$◄ \; q_1 = \frac{q_{12}(C_1/C_2 + 1) + q_{13}(C_1/C_3 + 1)}{1 + C_1/C_3 + C_1/C_2} \; ►.$$

3.55. Пусть расстояние между поршнями до и после зарядки равно l_0 и l. Напряженность электрического поля, создаваемого одним поршнем, равна $q/(2\varepsilon_0 S)$, поэтому сила, действующая на заряд каждого поршня, равна $q^2/(2\varepsilon_0 S)$. Из условия равенства сил, действующих на поршни после их зарядки,

$$p_0 S + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} = pS.$$

По закону Бойля — Мариотта $p_0 S l_0 = pSl$. Из этих уравнений

$$◀ \ \frac{l_0}{l} = 1 + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 p_0 S^2} \ ▶.$$

§ 3. Цепи постоянного и переменного тока

3.56. Точки, обладающие равными потенциалами (их легко найти из соображений симметрии), можно соединить. Получающаяся эквивалентная схема проста. ◀ $R_{AB} = 3R/2 = 1,5$ Ом ▶.

3.57. Если ключ разомкнут, то ◀ $R_{AB} = 5R/8 = 0,625$ Ом ▶. Если ключ замкнут, то точки F и D можно соединить или сторону FD убрать. Тогда ◀ $R_{AB} = R/2 = 0,5$ Ом ▶.

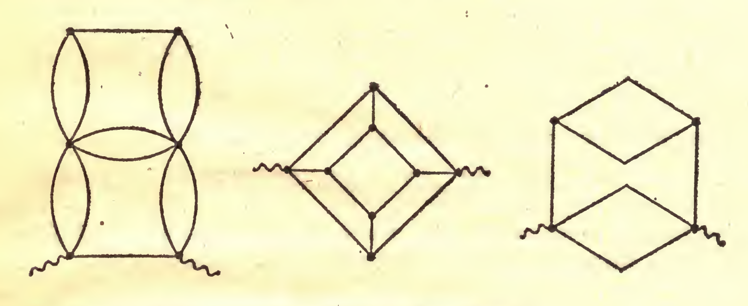


Рис. О.3.58 Рис. О.3.59

3.58. Соединив точки с равными потенциалами, получаем эквивалентную схему (рис. О.3.58). По этой схеме находим искомое сопротивление:

$$◀ \ R = 7R/12 = 0,58 \text{ Ом} \ ▶.$$

3.59. Соединив точки с равными потенциалами, получаем эквивалентные схемы (рис. О.3.59). По схеме (рис. О.3.59, справа) находим искомое сопротивление: ◀ $R = 3R/4 = 0,75$ Ом ▶.

3.60. Введем сопротивление единицы длины двухпроводной линии ρ. Тогда с учетом схем, приведенных на рис. О.3.60, получаем

$$\rho x + R_0 = R_1, \quad \rho x + \frac{R_0 \rho (l - x)}{R_0 + \rho (l + x)} = R_2, \quad \rho (l - x) + R_0 = R_3.$$

Рис. О.3.60

Решая систему уравнений, находим x:

$$◄ \quad x = l \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_3 - 2R_0}, \quad \text{где} \quad R_0 = [R_3 (R_1 - R_2)]^{1/2} \quad ►.$$

3.61. Сила тока $I = q/T$, где T — период вращения, $T = 2\pi r/v$. Отсюда ◄ $q = 2\pi r I/v$ ►.

3.62. Электроны движутся по стержню симметрично относительно точки A. Поэтому $I_A = 0$. По мере удаления от точки A сила тока растет по линейному закону. На расстоянии l сила тока

$$I_l = \frac{I}{2} \frac{l}{L},$$

где $L = AB$. По закону Ома $U_{AB} = I_{\text{ср}} R/2$. Так как зависимость тока от расстояния линейна, то среднее значение тока равно его среднему арифметическому: $I_{\text{ср}} = (I_A + I_B)/2 = I/4$.] Окончательно ◄ $U_{AB} = IR/8$ ►.

Можно рассуждать иначе. Разобьем стержень AB на N (причем $N \to \infty$) частей. В конце первого участка сила тока равна I_1, в конце n-го участка $I_n = nI_1$; $NI_1 = I/2$, откуда $I_1 = I/(2N)$. Сопротивление одного участка равно $R/(2N)$; падение напряжения на n-м участке

$$\frac{R}{2N} n I_1 = IR \frac{n}{4N}.$$

Падение напряжения на всем стержне AB равно

$$\frac{IR}{4N^2} \sum_{n=1}^{N} n = \frac{IR}{4N^2} \frac{N(N+1)}{2} \longrightarrow \frac{IR}{8} \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty.$$

3.63. ◄ $U_{AB} = IR/15$ ►.

3.64. Элемент схемы, состоящий из двух параллельно соединенных резисторов с сопротивлением 10 Ом и одного резистора с сопротивлением 5 Ом, подсоединенного к ним последовательно, повторяется в схеме трижды. Этот элемент понижает напряжение, поданное на вход цепи вдвое. Следовательно, искомое напряжение равно ◄ $U_{AB} = 160 : 2^3 = 20$ В ►.

3.65. Разность потенциалов между точками B и B' $U_{BB'}=U_0$, а разность потенциалов между точками A и A' равна $U_0/3=U_0\times$ $\times|R-R_x|/(R_x+R_0)$. Знак модуля присутствует потому, что вольтметр указывает абсолютное значение напряжения. Учитывая оба знака разности $R-R_x$, получим

$$◀\ R_x=R/2 \quad \text{при} \quad R_x<R, \qquad R_x=2R \quad \text{при} \quad R_x>R\ ▶.$$

3.66. Падение напряжения на элементе $U=IR_2=IR_{02}-cI\cdot IR_2$, то есть $U=IR_{02}-cIU$, откуда

$$U=IR_{02}/(1+cI).$$

Закон Ома дает

$$U_0=IR_1+U=IR_1+I\frac{R_{02}}{1+cI}.$$

Отсюда, решая квадратное уравнение, находим

$$◀\ I=(1/2cR_1)\left(U_0c-R_1-R_{02}+[(R_1-R_{02}-U_0c)^2+4cR_1U_0]^{1/2}\right)\ ▶.$$

3.67. Так как ток I_0, потребляемый лампой, по условию не зависит от напряжения, получаем, что падение напряжения на проводах с сопротивлением $2R$ зависит от номера лампы n, отсчитываемого от последней лампы: $U_n=2RI_0n$. Для N-й лампы

$$U=U_0-2RI_0\sum_{n=1}^{N}n=U_0-2RI_0\frac{N(N+1)}{2}=0{,}9U_0.$$

Отсюда

$$◀\ R=\frac{U_0}{10I_0N(N+1)}\ ▶.$$

3.68. $I=\dfrac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}{r_1+r_2+R}$, $◀\ U=\mathscr{E}_1+Ir_1=\dfrac{\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1+\mathscr{E}_1R}{r_1+r_2+R}\ ▶.$

Знак «+» при величине Ir_1 в выражении для падения напряжения U объясняется тем, что ток I направлен противоположно действию э. д. с. $\mathscr{E}_1$.

3.69. Так как вольтметр высокоомный, током через него можно пренебречь.

$$◀\ U=\frac{U_0R_1}{R_1+R_2}-\frac{U_0R_3}{R_3+R_4}=U_0\frac{R_1R_4-R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}\ ▶.$$

3.70. Из соображений симметрии следует, что $I_{BD}=0$, $I_{CD}=$ $=I_{BC}=I_0/2$. Количество выделившейся теплоты $Q\backsim I^2R$. Запишем соотношения для токов, протекающих через ребра AB и BE:

$$I_{AB}:I_{BE}=R:2R, \quad I_{AB}+I_{BE}=\frac{I_0}{2}, \quad I_{AB}=\frac{I_0}{6}, \quad I_{BE}=\frac{I_0}{3}.$$

Таким образом,

$$◀\ Q_{BD}:Q_{BC}:Q_{CD}:Q_{AB}:Q_{BE}=0:9:9:1:4\ ▶.$$

Если сопротивление ребра BD сделать равным нулю, а сопротивление ребра CD равным $2R$, то соотношения для токов будут

иметь вид

$$I_{BC}:I_{CD}=2R:R,\quad I_{BC}+I_{CD}=I_0,\quad I_{BC}=\frac{2I_0}{3},\quad I_{CD}=\frac{I_0}{3};$$

$$I_{AB}:I_{BE}=R:2R,\quad I_{AB}+I_{BE}=\frac{I_0}{2},\quad I_{AB}=\frac{I_0}{6},\quad I_{BE}=\frac{I_0}{3}.$$

Таким образом, в этом случае

$$◀\ Q_{BD}:Q_{BC}:Q_{CD}:Q_{AB}:Q_{BE}=0:16:8:1:4\ ▶.$$

3.71. Потенциал точек A и C одинаков, их можно соединить. Тогда эквивалентные схемы приобретают простой вид и

$$◀\ I_{AC}=\frac{I}{2}-\frac{I}{4}=\frac{I}{4},\quad P=\frac{17I^2R}{12}\ ▶.$$

3.72. Сопротивление утечки конденсатора $R=\rho l S$, его емкость $C=\varepsilon\varepsilon_0 S/l$, а заряд $q=CU=C(\mathscr{E}-Ir)=C\mathscr{E}R/(R+r)$. Так как $CR=\varepsilon\varepsilon_0\rho$, то

$$◀\ q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon\varepsilon_0\rho}{R+r}\ ▶.$$

3.73. Заряд, протекший через резистор при вдвигании пластины,

$$q=(C_1-C_0)\,U=\left(\frac{\varepsilon_0 l^2}{d_0-d}-\frac{\varepsilon_0 l^2}{d_0}\right)(\mathscr{E}-IR)=\frac{\varepsilon_0 l^2 d\,(\mathscr{E}-IR)}{d_0\,(d_0-d)},$$

$$q=It=I\,\frac{l}{v}.$$

Отсюда находим ток I и получаем (мощность на резисторе выделяется в виде теплоты)

$$◀\ P=I^2R=\mathscr{E}^2R\Big/\left[R+\frac{d_0\,(d_0-d)}{\varepsilon_0 l\,dv}\right]^2\ ▶.$$

3.74. $U_C=U_{R_2}$, поэтому ◀ $q=U_CC=U_0CR_2/(R_1+R_2)$ ▶.

3.75. Через конденсаторы емкости C_1 и C_2 постоянный ток не идет. Через резисторы с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 идет ток $I=U_0/(R_1+R_2+R_3)$. Отсюда

$$◀\ q_1=U_0C_1\,\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3},\quad q_2=U_0C_2\,\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}\ ▶.$$

3.76. Постоянный ток через конденсаторы не идет. Таким образом,

$$◀\ q_1=C_1U_0,\quad q_2=\frac{C_2U_0}{1+R_2/R_1},\quad q_3=\frac{C_3U_0}{1+R_1/R_2}\ ▶.$$

3.77. Постоянный ток через конденсатор не течет. Несложный расчет части цепи, состоящей из резисторов, дает значение потенциала левой обкладки конденсатора, равное $4U_0/5$, потенциал правой обкладки равен нулю. Таким образом, ◀ $q=4U_0C/5$ ▶.

3.78. Через конденсаторы постоянный ток не идет. Потенциалы в точках схемы M, N и K: $U_M=U$, $U_N=U/3$, $U_K=0$. Сумма зарядов трех внутренних пластин конденсаторов равна нулю: $q_1+q_2+q_3=0$.

Пусть U_C — разность потенциалов на конденсаторе, обкладка которого заземлена. Тогда

$$C(U-U_C)=q_1,\quad CU_C=q_2,\quad C(U_C-U/3)=q_1-q_2.$$

Отсюда ◀ $q_2=-4UC/9$ ▶.

3.79. 1. По закону Ома

$$I=\frac{U}{R}=\frac{q_0-It}{RC}=\frac{q_0}{R_0C}.$$

Отсюда ◀ $R=R_0-t/C$ ▶.

2. По закону Ома

$$U=\frac{q_0-It}{C}=IR,\quad \frac{q_0}{C_0}=IR.$$

Отсюда ◀ $C=C_0-t/R$ ▶.

3.80. В интервал времени (половина периода), когда диод открыт и ток идет через резистор *3*, эквивалентное сопротивление цепи равно $3R/2$, а ток через этот резистор равен $U/3R$. Средняя за весь период мощность равна $I^2R/2$, то есть ◀ $P=U^2/18R$ ▶.

3.81. 1. Тока через диод нет, пока приложенное к нему напряжение не достигнет 10 В. При более высоком напряжении диод влияния на характер тока, протекающего в цепи, не оказывает. Пусть зависимость от времени переменного напряжения имеет вид $U(t)=U_0\cos(2\pi t/T)$, где $U_0=220$ В. Если учесть э. д. с. батареи, то ясно, что диод открыт при $U(t)\geqslant 210$ В, то есть при $\cos(2\pi t/T)\geqslant 21/22$. В течение времени $\tau=(T/\pi)\arccos(21/22)$ диод открыт. Искомая доля периода

$$◀\ \frac{\tau}{T}=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{21}{22}\ ▶.$$

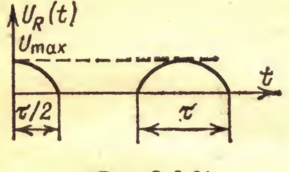


Рис. О.3.81

Максимальное падение напряжения на резисторе ◀ $U_{max}=10$ В ▶. Качественный график зависимости от времени падения напряжения на резисторе представлен на рис. О.3.81.

2. Зависимость тока через диод от напряжения расшифровывается просто: тока через диод нет, пока приложенное к нему напряжение не достигнет 10 В. При дальнейшем увеличении напряжения диод эквивалентен резистору с сопротивлением 10 Ом.

Предположим, что зависимость от времени переменного напряжения имеет вид $U(t)=U_0\cos(2\pi t/T)$, где $U_0=220$ В. Если учесть э. д. с. батареи, ясно, что диод открывается, когда $U(t_1)=210$ В, и закрывается, когда напряжение снова упадет до $U(t_2)=210$ В. То есть диод открыт, пока $\cos(2\pi t/T)\geqslant 210/220$. Поэтому искомая доля периода

$$◀\ \frac{\tau}{T}=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{21}{22}\ ▶.$$

Искомое максимальное падение напряжения на резисторе ◀ $U_{max} = 5$ В ▶.

3.82. Зависимость тока от времени имеет вид $I = I_0(1+\alpha \sin \omega t)$, где $\alpha = 0,1$. Тогда количество теплоты

$Q = R(I^2)_{cp} = RI_0^2 [1 + 2\alpha (\sin \omega t)_{cp} + \alpha^2 (\sin^2 \omega t)_{cp}] = RI_0^2 (1 + \alpha^2/2)$, так как

$$(\sin \omega t)_{cp} = 0 \quad \text{и} \quad (\sin^2 \omega t)_{cp} = 1/2 - (1/2)(\cos 2\omega t)_{cp} = 1/2.$$

Таким образом, среднее количество теплоты изменится на $(\alpha^2/2) \times 100$ %, то есть на ◀ 0,5 % ▶.

3.83. По закону сохранения энергии в шаре в единицу времени выделяется количество теплоты Q_t, равное разности энергии попавших на шар n_t электронов и тепловой энергии I^2R, выделившейся на резисторе с сопротивлением R в единицу времени:

$$Q_t = n_t mv^2/2 - I^2R, \quad \text{где} \quad I^2R = n_t e.$$

Отсюда

$$◀ \ Q_t = n_t \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{2n_t e^2 R}{mv^2}\right) \ ▶.$$

3.84. Если поле в конденсаторе однородно, а вне конденсатора равно нулю, тогда будет изменяться лишь поперечная составляющая импульса у каждого из $n_t = I/e$ электронов, пролетающих конденсатор в единицу времени:

$$\Delta (mv)_\perp = mv_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, на пучок действует сила

$$F = \frac{I}{e} mv_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

С учетом третьего закона Ньютона и закона Гука дополнительное удлинение пружины, вызванное воздействием электронов на пластину конденсатора,

$$\Delta l' = \frac{I \Delta l}{eMg} mv_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Можно вычислить силу иначе, определив полный заряд, находящийся в любой момент времени внутри конденсатора и взаимодействующий с его полем.

Заметим, что начальное предположение о сохранении продольной составляющей импульса, неверно! Действительно, при таком предположении получается, что электрон, пройдя конденсатор, увеличивает свою энергию. Если бы это было так, можно было бы получить сколько угодно энергии без подвода ее извне, заставив электрон, например, с помощью постоянного магнитного поля многократно проходить через конденсатор.

Электростатическое поле конденсатора потенциально, поэтому электрон, описав замкнутую траекторию, должен иметь опять начальную энергию: $A = q(U_1 - U_1) = 0$!

Значит, при выходе из конденсатора на большом расстоянии от него энергия электрона не должна измениться. Поэтому сохраняется не продольная составляющая импульса, а полный импульс, что дает замену в выражении для импульса функции $\operatorname{tg}\alpha$ на $\sin\alpha$. Таким образом, окончательно без учета отклонения конденсатора от вертикали

$$◀ \ \Delta l' = \frac{I \Delta l m v_0 \sin\alpha}{eMg} \ ▶.$$

3.85. $t = \frac{l}{v_0}$, $a_y = \frac{eU}{md}$, $h = a_y \frac{t^2}{2} = \frac{eUl^2}{2mv_0^2 d}$,

$$◀ \ n_t = n_V h x v_0 = \frac{n_V e U x l^2}{2 m v_0 d} \ ▶.$$

3.86. Напряженность поля внутри конденсатора $E = (\mathscr{E} - IR)/d$, где I — ток, равный заряду, переносимому электронами, попавшими на положительно заряженную пластину в единицу времени. На эту пластину в общем случае попадает лишь часть пучка электронов, ограниченная теми из них, которые, двигаясь по параболической траектории, попадают на самый край пластины. Пусть y — расстояние до положительной пластины при влете таких электронов, а t — время их полета. Тогда

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{eE}{2m} \frac{l^2}{v_0^2}.$$

Число электронов, приходящих в единицу времени к положительной пластине, $I = eyxn_V v_0$. Таким образом, $I = eyxn_V v_0 = (e^2 x n_V l^2 / 2mv_0 d) \times \times (\mathscr{E} - IR)$. Отсюда

$$◀ \ I = \frac{\mathscr{E}}{R + 2mv_0 d/(e^2 l^2 x n_V)} \ ▶.$$

Если же весь пучок попадает на положительную пластину (тогда $y = d$), то

$$◀ \ I = e n_V d x v_0 \ ▶.$$

3.87. Рассмотрим небольшой интервал времени Δt. За это время к аноду подлетят $\Delta n = I\,\Delta t/e$ электронов (e — заряд электрона) и сообщат ему импульс, равный $mv\ \Delta n$. Скорость v электрона у анода можно найти из закона сохранения энергии: $mv^2/2 = eU$. Согласно второму закону Ньютона

$$F\,\Delta t = mv\ \Delta n = mvI\,\Delta t/e.$$

Отсюда, с учетом связи $I = cU^{3/2}$, получаем $F = (I/e)mv = c\sqrt{2m/e}\,U^2$. Таким образом, отношение сил

$$◀ \ \frac{F}{F_0} = \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 4 \ ▶.$$

§ 4. Электромагнитная индукция. Взаимодействие тока с магнитным полем

3.88. $\mathscr{E}=-\Delta\Phi/\Delta t$, $I=\mathscr{E}/R$. ◀ $q=I\ \Delta t=Bl^2/R$ ▶.

3.89. Изменение магнитного потока и соответственно э. д. с. индукции уменьшились вдвое из-за уменьшения вдвое площади. Отсюда следует, что и амплитуда тока станет меньше в два раза.

3.90. При сложении кольца в сдвоенную восьмерку его площадь станет вчетверо меньше первоначальной площади. Магнитный поток не должен меняться, иначе возникнут из-за отсутствия сопротивления огромные токи, которые разрушат состояние сверхпроводимости. Таким образом, индукция магнитного поля в центре кольца должна увеличиться в 4 раза: ◀ $B=4B_0$ ▶, ток, протекающий по проводу, не изменится: ◀ $I=I_0$ ▶. Ток, протекающий по сдвоенному проводу получившегося кольца, естественно, равен $2I_0$.

3.91. ◀ $Q=\dfrac{(SB)^2}{R}\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)=\dfrac{(\pi d^2B)^2}{R}\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)$ ▶.

3.92. Записав работу вихревого электрического поля, вызвавшего изменение кинетической энергии протона, получаем

$$e\mathscr{E}_{\text{инд}}=e\ \Delta\Phi/\Delta t=e\mathscr{E}=mv^2/2-mv_0^2/2.$$

Ток в пучке протонов

$$I=\frac{nev}{2\pi R},\quad I_0=\frac{nev_0}{2\pi R},$$

откуда

$$◀\ I=\left(I_0^2+\frac{n^2e^3\mathscr{E}}{2\pi^2mR^2}\right)^{1/2}\ ▶.$$

3.93. При изменении магнитного поля возникает электрическое поле, раскручивающее кольцо. Магнитный поток

$$\Phi=\pi B\ (l^2+r^2).$$

Э. д. с. индукции

$$\mathscr{E}_{\text{инд}}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\pi\ (l^2+r^2)\ \frac{\Delta B}{\Delta t}=E\cdot 2\pi r.$$

Сила, действующая на выделенный на кольце заряд Δq:

$$F=\Delta qE.$$

Тангенциальное (направленное по касательной к траектории) ускорение $a_t=qE/m=\text{const}$; $v=a_t\Delta t$; $\Delta B=B$, так как магнитное поле уменьшается до нуля. Окончательно

$$◀\ v=\frac{qB\ (l^2+r^2)}{2mr}\ ▶.$$

3.94. Используя закон Фарадея, получаем $\mathscr{E}_{\text{инд}\ 1,2}=Blv_{1,2}$, где $\mathscr{E}_{\text{инд}\ 1,2}=I_{1,2}R_{1,2}+I_0R_0$. Так как $I_0=I_1+I_2$, то

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_{\text{инд}\ 1}R_2+\mathscr{E}_{\text{инд}\ 2}R_1}{R_1R_2+R_0R_1+R_0R_2}=Bl\frac{v_1R_2+v_2R_1}{R_1R_2+R_0R_1+R_0R_2}.$$

Окончательно

$$\blacktriangleleft\ I_0 = 3{,}6\ \text{мА}\ \blacktriangleright.$$

3.95. Используя закон Фарадея, получаем

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = B\,\Delta S/\Delta t = Bvl, \quad \text{где} \quad l = vt\cdot\operatorname{tg}\alpha; \quad vt_0 = l_0.$$

Сопротивление $R = lR_l = R_l vt\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Тогда мощность, выделившаяся в цепи,

$$P = \frac{\mathscr{E}^2_{\text{инд}}}{R} = \frac{t}{R_l} B^2 v^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Окончательно

$$\blacktriangleleft\ Q = Pt_0 = \frac{\mathscr{E}^2_{\text{инд}} t_0}{2R} = \frac{B^2 v^3 t_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{2R_l} = \frac{B^2 v t_0^3}{2R_l}\operatorname{tg}\alpha\ \blacktriangleright.$$

3.96. По закону Фарадея $|\mathscr{E}_{\text{инд}}| = B\ \Delta S/\Delta t = Bl^2\omega/2$. Мощность $Fv = Fl\omega = \mathscr{E}^2_{\text{инд}}/R$. Отсюда

$$\blacktriangleleft\ F = \frac{B^2 l^3 \omega}{4R}\ \blacktriangleright.$$

3.97. Запишем условие равенства моментов сил, действующих на рамку: $(m_1 + m_2)gl_2 \cos\alpha = Il_1 l_2 \sin\alpha$. Окончательно

$$\blacktriangleleft\ I = \frac{(m_1 + m_2)}{l_1} g \operatorname{ctg}\alpha\ \blacktriangleright.$$

3.98. Второй закон Ньютона, с учетом силы действия магнитного поля на ток, приводит к уравнению: $ma = mg - BlI$, где $I = \Delta q/\Delta t = C\,\Delta\mathscr{E}_{\text{инд}}/\Delta t = CBl\,\Delta v/\Delta t = CBla$. Таким образом, подставляя выражение тока I через ускорение a в первое уравнение, получаем

$$\blacktriangleleft\ a = \frac{g}{1 + CB^2l^2/mg}\ \blacktriangleright.$$

3.99. Так как скорость стержня постоянна, то сила действия магнитного поля на ток через стержень уравновешивается силой тяжести, действующей на него:

$$IBl = mg.$$

Законы Фарадея и Ома дают

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -Blv, \quad IR = \mathscr{E} - Blv.$$

Отсюда

$$\blacktriangleleft\ v = \frac{\mathscr{E}}{Bl} - \frac{mgR}{B^2l^2}\ \blacktriangleright.$$

3.100. По закону Ома $I = U/R$, где $R = \gamma l/S$. Выражения для сил имеют вид $F = IBl$, $mg = \rho lSg$. Окончательно

$$\blacktriangleleft\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{BU}{\gamma\rho lg}\ \blacktriangleright.$$

3.101. Пусть высота подъема ртути равна x, а ширина проводящей пластины H. Тогда давление $\rho gx = F/S = F/lH = IBl/lH$, так как $F = IBl$. Ток

$$I = \frac{U}{\gamma\,(l/Hx)} = \frac{UHx}{\gamma l}.$$

Если $x>h$, то $I=UHh/\gamma l$. Таким образом,

$$◀\ x=\frac{hUB}{\rho g l\gamma} \quad \text{при} \quad \frac{UB}{\rho g l \gamma}\geqslant 1,$$

$$x=0 \quad \text{при} \quad \frac{UB}{\rho g l\gamma}<1\ ▶.$$

При выбранных числовых значениях параметров ◀ $x=1{,}5$ м ▶.

3.102. По второму закону Ньютона

$$mv_\text{в}^2/l=mg+T-qv_\text{в}R.$$

Из условия минимальности скорости $v_\text{н}$ в нижней точке траектории требуем, чтобы сила натяжения нити в верхней точке $T=0$. Из закона сохранения энергии получаем

$$mv_\text{н}^2/2=mv_\text{в}^2/2+2mgl.$$

Магнитное поле работу не совершает, так как сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости. Знак минус у силы Лоренца выбран в соответствии с условиями задачи. Окончательно

$$◀\ v_\text{н}=\left[5gl+\frac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)\right]^{1/2}\ ▶.$$

3.103. Так как через контур r, R_2 не проходит переменный магнитный поток, то э. д. с. в нем не индуцируется и сопротивления r и R_2 оказываются включенными параллельно:

$$◀\ I=\frac{\mathscr{E}/N}{R_1+R_2r/(R_2+r)}\,\frac{R_2r}{R_2+r}\,\frac{1}{r}=\frac{\mathscr{E}R_2}{N\,(R_2r+R_1R_2+R_1r)}\ ▶.$$

3.104. По закону Фарадея падение напряжения на катушке

$$U_L=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{L\,\Delta I}{\Delta t}.$$

Так как ток в цепи растет пропорционально времени, U_L со временем не изменяется и в любой момент $U_L=LI/t$. Следовательно, и напряжение на конденсаторе, равное напряжению на катушке, тоже остается постоянным:

$$U_C=\frac{q_0}{C_0}=\frac{q_0-q}{C},$$

где q_0 — начальный заряд на конденсаторе, q — заряд, ушедший с обкладок конденсатора за время t, C — емкость конденсатора в момент t. Из равенства $LI/t=q_0/C_0$ находим ток:

$$I=\frac{q_0t}{LC_0}.$$

Тогда ушедший с конденсатора заряд

$$q=I_\text{ср}t=\frac{I}{2}\,t=q_0\frac{t^2}{2LC_0}.$$

Из условия постоянства напряжения на конденсаторе найдем емкость:

$$◀ \ C = C_0 \frac{q_0 - q}{q_0} = C_0 \left(1 - \frac{t^2}{2LC_0}\right) \ ▶^{*)}.$$

3.105. По закону сохранения энергии

$$C\frac{U_0^2}{2} = L_1\frac{I_1^2}{2} + L_2\frac{I_2^2}{2}.$$

Приравнивая магнитные потоки, проходящие через катушки индуктивности, получаем $L_1I_1 = L_2I_2$. Решая систему уравнений, находим

$$◀ \ I_1 = U_0\left(\frac{L_2}{L_1}\frac{C}{L_1+L_2}\right)^{1/2}, \quad I_2 = U_0\left(\frac{L_1}{L_2}\frac{C}{L_1+L_2}\right)^{1/2} \ ▶.$$

Глава IV. ОПТИКА

§ 1. Отражение. Зеркала

4.1. $◀ \ h_{\min} = \dfrac{H}{1 + L/l} \ ▶.$

4.2. Рассмотрим мнимый источник звука, находящийся в симметричной относительно стены точке A^* (аналогично тому, как проводится в оптике рассмотрение отражения света от плоского зеркала; рис. О.4.2). Чтобы отраженный сигнал пришел сразу же вслед идущему по прямой, необходимо, чтобы

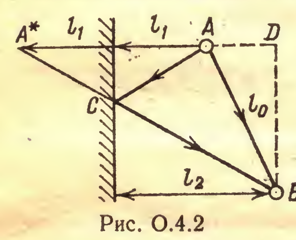


Рис. О.4.2

$$ct = AC + CB - l_0 = A^*B - l_0 =$$
$$= [(l_1 + l_2)^2 + BD^2]^{1/2} - l_0,$$
$$BD^2 = l_0^2 - AD^2 = l_0^2 - (l_2 - l_1)^2.$$

Отсюда $◀ \ t = [(l_0^2 + 4l_1l_2)^{1/2} - l_0]/c \ ▶.$

4.3. При отражении звука угол падения равен углу отражения. То есть задачу можно рассматривать аналогично оптической задаче на отражение света в плоском зеркале. В момент подачи сигнала изображение источника звука будет расположено симметрично относительно стены по другую сторону от нее на расстоянии l от нее. Вместо отражения звукового сигнала от стены можно рассматривать испускание звука из точки изображения источника. Если t — время, через которое шофер услышит эхо, то за это время автомобиль пройдет путь vt, а звук — путь ct. Из геометрических построений (рис. О.4.3) получаем уравнение

$$c^2t^2 = (2l + vt\sin\alpha)^2 + (vt\cos\alpha)^2.$$

---

*) Естественно, ответ справедлив при условии, что $q < q_0$, то есть при условии, что $t^2/(2LC_0) < 1$. (*Примеч. ред.*)

Искомое расстояние $x=vt$, тогда

$$(c^2/v^2-1)\,x^2-4xl\sin\alpha-4l^2=0.$$

Отсюда

$$◄\quad x=\frac{2l}{c^2/v^2-1}\left[\sin\alpha+\sqrt{\left(\frac{c}{v}\right)^2-\cos^2\alpha}\right]\quad ►.$$

4.4. Вследствие теплового расширения изменится фокусное расстояние F, равное половине радиуса зеркала. Пусть F_0 — фокусное расстояние при 0 °C, тогда

$$l_1=F_1=F_0(1+\alpha t_1),\ l_2=F_2=F_0(1+\alpha t_2),\quad F_0=\frac{l_1}{1+\alpha t_1}.$$

Таким образом,

$$◄\quad l_2=\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}\,l_1\quad ►.$$

Правильным является и ответ ◄ $l_2=l_1[1+\alpha(t_2-t_1)]$ ►.

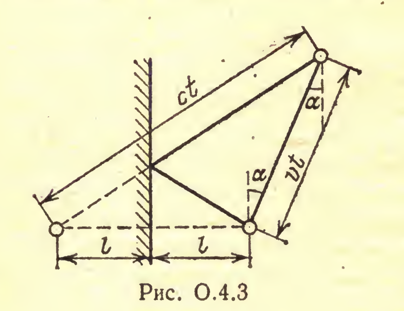


Рис. О.4.3

Рис. О.4.5

4.5. Найдем среди лучей, падающих на зеркало, такой луч EA, который после отражения прошел бы через крайнюю точку B зеркала (рис. О.4.5). O — центр зеркала, A — точка падения луча. Тогда по закону отражения $\angle OAB=\angle OAE=\alpha$ и $\angle OBA=\angle OAB=\alpha$, так как $\triangle AOB$ — равнобедренный (AO и OB — радиусы сферы). Поэтому искомый угол расхождения лучей равен удвоенному углу OCB и равен $2(90°-\alpha)$.

Проведем отрезок CD, перпендикулярный AO. Тогда $OC=r/(2\cos\alpha)$ (причем $\angle AOC=\angle EAO=\alpha$ как накрест лежащие; $AD=DO=r/2$). $OC/OB=\operatorname{tg}\alpha=1/(2\cos\alpha)$, откуда $\sin\alpha=1/2$, $\alpha=30°$. Искомый угол ◄ $2(90°-\alpha)=120°$ ►.

Из чертежа можно увидеть сразу, что $\angle EAB+\angle EBA=3\alpha=90°$. Отсюда $\alpha=30°$.

4.6. Пусть в точке S' находится изображение источника света S в плоском зеркале. Пусть $OS=d=3r/4$, $OS'=f$, $OO'=x$, где O и O' — точки, в которых расположены вогнутое и плоское зеркала

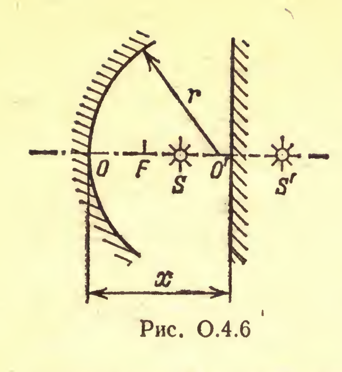


Рис. О.4.6

(рис. О.4.6). Так как $SO'=O'S'$, то $f-x=x-d$, то есть

$$x=\frac{1}{2}\left(f+\frac{3}{4}r\right).$$

По формуле зеркала

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Фокусное расстояние вогнутого зеркала $F=r/2$, откуда $f=(3/2)r$. Таким образом, ◀ $x=(9/8)r$ ▶.

Проведя решение в общем виде, получим

$$x=\frac{d^2}{2d-r} \quad \text{при} \quad r/2\leqslant d\leqslant r.$$

4.7. 1. Изображение S_1', создаваемое нижней половиной зеркала, расположено в той же точке, что и источник ($r=2F$). Второе изображение находится по формуле линзы: $1/d+1/f=1/F$, откуда $F=r/2$, $d=2r$, $f=2r/3$. ◀ $S_1'S_2'=2r-2r/3=4r/3$ ▶.

2. Дополним половину зеркала до целого и построим изображение источника S, направив на зеркало два луча. Один луч, пройдя через фокус и отразившись от зеркала, пойдет параллельно главной оптической оси; луч, распространявшийся вдоль прежней главной оптической оси, отразившись, пройдет через фокус. Так как источник был на двойном фокусном расстоянии от зеркала, то и изображение будет на расстоянии $2F$, то есть $SS_1'=2h$.

Для второго изображения построение аналогично. Таким образом,

$$◀ \quad S_1'S_2'=4h \quad ▶.$$

4.8. Вычисляя долю нейтронов, прошедших последовательно через каждый миллиметр своего пути сквозь пластинку, получаем, что доля нейтронов, прошедших сквозь всю пластинку, равна $(0{,}85)^8\approx 0{,}27$ (27%) ▶.

4.9. С учетом двукратного отражения $I_1=I_0(1-R)^2$, с учетом четырехкратного отражения $I_2=I_0(1-R)^2R^2$. Полная интенсивность света, прошедшего через пластинку,

$$I=I_0(1-R)^2(1+R^2+R^4+\ldots)=I_0\frac{(1-R)^2}{1-R^2},$$

$$◀ \quad I=I_0\frac{1-R}{1+R} \quad ▶.$$

§ 2. Преломление

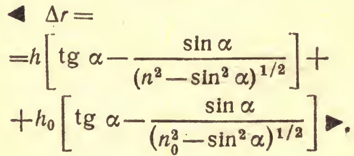
4.10. Записывая последовательно закон преломления для каждой из пластин, в конце концов получаем угол падения, соответствующий полному внутреннему отражению. Тогда $\sin\alpha_{\min} = n/k^{N-1}$.

$$◀ \quad \alpha_{\min} = \arcsin\frac{n}{k^{N-1}} \quad ▶.$$

4.11. Рассматривая ход лучей на рис. О.4.11, запишем $(h_0+h)\operatorname{tg}\alpha - h\operatorname{tg}\beta - h_0\operatorname{tg}\gamma = \Delta r$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{n_0}{n}, \text{ то есть}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_0.$$



$$◀ \quad \Delta r = h\left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{(n^2-\sin^2\alpha)^{1/2}}\right] + h_0\left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{(n_0^2-\sin^2\alpha)^{1/2}}\right] ▶.$$

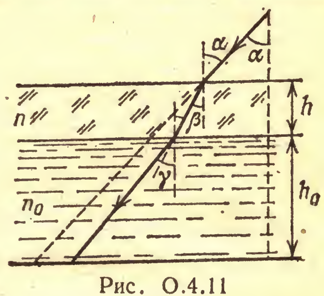


Рис. О.4.11

4.12. Доля δ энергии, прошедшей сквозь шар, пропорциональна отношению площади кольца $\pi(r_0^2 - x^2)$, через которое идет далее непоглощенный свет, к площади сечения трубы πr_0^2.

С учетом закона преломления

$$x = r_0\sin\alpha = r_0 n\sin\beta = r_0 nr/r_0 = nr \qquad (\sin\beta = r/r_0).$$

Отсюда имеем

$$◀ \quad \delta = 1 - (nr/r_0)^2 \quad \text{при} \quad nr < r_0,$$
$$\delta = 0 \quad \text{при} \quad nr \geqslant r_0 \ ▶.$$

4.13. Поверхность жидкости в струе образует с горизонтально направленным лучом света угол α, для которого имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{v_{\text{верт}}}{v_{\text{гор}}} = \sqrt{\frac{r}{h}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$◀ \quad h = \frac{r}{n^2-1} \quad ▶.$$

4.14. Проведем луч AB из края круга (рис. О.4.14) перпендикулярно боковой поверхности конуса. Тогда (так подобрано значение угла $\alpha = 30°$) после отражения от противоположной стороны конуса луч пойдет вертикально вверх, будет наблюдаться полное внутреннее отражение, так как $n = 1{,}4$ соответствует критическому углу падения, равному в условиях задачи 60°.

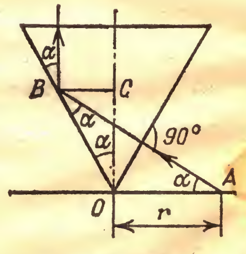


Рис. О.4.14

Проведем отрезок BC, перпендикулярный OC. Наблюдатель в результате отражения вместо радиуса OA будет видеть отрезок BC, то есть увидит круг радиуса BC. $\angle OAB = \angle OBA = \alpha = 30°$. Поэтому $OB = OA = r_0$. Видимый радиус круга ◀ $BC = OB \sin\alpha = r_0/2 = 0{,}1$ м ▶.

4.15. Построения на рис. О.4.15, *а* стандартны и не требуют пояснений. Следует помнить о малости углов ($\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$). По закону преломления $\sin\beta/\sin\alpha = 1/n$, отсюда $\alpha \approx n\beta$. Выражая AB через $\angle AOB$ и $\angle ACB$, имеем $r\beta = x(\alpha - \beta)$. Отсюда $x = r/(n-1)$.

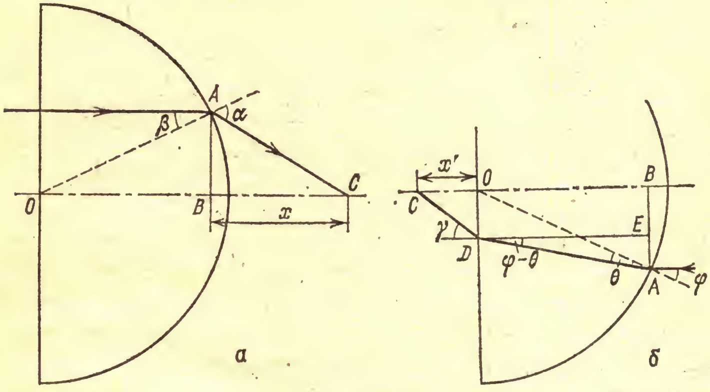


Рис. О.4.15

Рассмотрим распространение пучка света в обратном направлении (рис. О.4.15, *б*). Проведем дополнительно еще отрезки $OA = r$ и DE. Из закона преломления $\sin\varphi/\sin\theta = n$ получаем $\varphi \approx n\theta$. Из условия преломления на плоскости имеем

$$\frac{\gamma}{\varphi - \theta} = n.$$

Выразим OD через $\angle OCD$ и отрезок $BE = AB - AE$. Учтем, что раз углы малы, то $OD = x' \operatorname{tg}\gamma \approx x'\gamma$. Таким образом,

$$x'\gamma = x'n(\varphi - \theta) = r\varphi - r(\varphi - \theta).$$

То есть $r\theta = x'n(\varphi - \theta)$. Отсюда ◀ $x' = \dfrac{r}{n(n-1)} = \dfrac{x}{n}$ ▶.

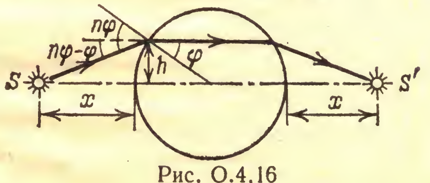


Рис. О.4.16

4.16. Из соображений симметрии и закона преломления устанавливается ход лучей, показанных на рис. О.4.16. Для малых углов

$h = r\varphi = x(n\varphi - \varphi)$. Отсюда

$$◄\ x = \frac{r}{n-1}\ ►.$$

В то же время x равно фокусному расстоянию плосковыпуклой тонкой линзы (показатель преломления n, радиус кривизны r), отрезанной от шара.

4.17. Из соображений симметрии и обратимости лучей света следует, что лучи проходят через центр цилиндра.

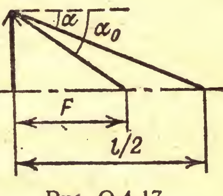


Рис. О.4.17

Из закона преломления при прохождении света из стекла линзы в воздух

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta} = n_0 \approx \frac{r}{F}\frac{1}{\sin\beta},$$

где n_0 — показатель преломления стекла, β — угол падения, α_0 — угол преломления в воздухе, r — расстояние то точки падения луча на границу раздела стекло — воздух до оси цилиндра. Для случая прохождения света из стекла в воду имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_0}{n} \approx \frac{2r}{x}\frac{1}{\sin\beta};$$

здесь α — угол преломления в воде (рис. О.4.17). Отсюда $\sin\alpha/\sin\alpha_0 = 1/n = 2F/x$, то есть ◄ $x = 2Fn$ ►.

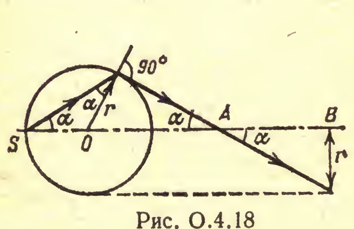


Рис. О.4.18

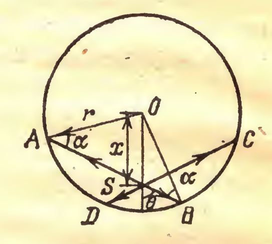


Рис. О.4.19

4.18. Максимальное расхождение лучей, выходящих из шара вправо, определяется эффектом полного внутреннего отражения света (рис. О.4.18): $n\sin\alpha = 1$; $n = 2$; $\sin\alpha = 1/2$, $\alpha = 30°$. Тогда $x = OA + AB = r/\sin 30° + r/\mathrm{tg}\,30°$.

$$◄\ x = r(2 + \sqrt{3}) = 0{,}37\ \text{м}\ ►.$$

4.19. Только половина светового потока выходит вследствие эффекта полного внутреннего отражения из шара: $\sin\alpha = 1/n$, где α — критический угол полного внутреннего отражения (рис. О.4.19). Поэтому за пределы шара выйдут только лучи света, распространяющиеся внутри конических углов ASC и DSB. Поскольку $AO = OB = r$,

$OS=x$ — искомое расстояние, то $r\sin\alpha=x\sin\theta$ и

$$x=r\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{r}{n\sin\theta}.$$

Сумма телесных углов ASC и DSB, по условию равная 2π, выражается через угол θ:

$$2\pi=2\cdot 4\pi\sin^2\frac{\theta}{2},$$

откуда получаем $\theta=60°$. Окончательно

$$◀\ x=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{r}{n}=\frac{4}{3\sqrt{3}}r\ ▶.$$

§ 3. Линзы

4.20. Используя формулу линзы, получаем

$$\frac{1}{L-f}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Учитывая, что по условию $f_1-f_2=l$, получаем окончательно

$$◀\ F=\frac{L^2-l^2}{4L}\ ▶.$$

4.21. 1. Линза — собирающая; $l/l_0=f/d=F/(d-F)$, $f_1=-F/3$, $f_2=-3F$. Окончательно ◀ $l=|f_2-f_1|=8F/3$ ▶.

Если закрыть центральную часть линзы, то изменится лишь освещенность изображения, так как кружок закроет лишь часть лучей, формирующих изображение.

2. $f/d=F/(d+F)=1/2$. ◀ $l=l_0/2=F/2$ ▶. Линза хотя и двояковыпуклая, но рассеивающая, так как по условию задачи ее оптическая плотность меньше оптической плотности окружающей среды.

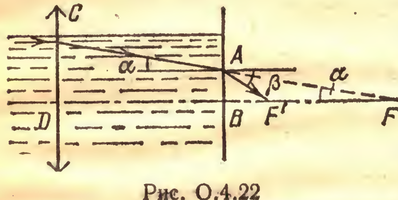


Рис. О.4.22

4.22. Полая двояковогнутая линза находится в оптически более плотной среде, следовательно, линза должна быть собирающей. Параллельный пучок, падающий на нее, должен был бы собраться в фокусе F (рис. О.4.22), но, преломляясь на границе раздела AB, он попадет в точку F'. Угол падения равен α, угол преломления равен β:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{BF},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{AB}{BF'},$$

$$\frac{BF}{BF'}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\approx\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n},\quad BF'=\frac{F-h}{n},$$

Искомое расстояние

$$◀\ DF' = h + BF' = \frac{F}{n} + h\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ ▶.$$

4.23. При повороте зеркала на угол $\Delta\alpha$ отраженный луч повернется на угол $2\Delta\alpha$, то есть угловая скорость вращения отраженного луча равна 2ω. Мгновенная скорость светового пучка, сфокусированного в точке экрана, таким образом, равна ◀ $v=2\omega F$ ▶.

4.24. На экране получится окружность диаметра $2r=2F\ \mathrm{tg}\ \theta\approx\approx 2F\theta$ (рис. О.4.24); $\theta=\beta-\alpha$, $\sin\alpha/\sin\beta=1/n$, $\beta\approx n\alpha$, $\theta\approx\alpha(n-1)$, ◀ $2r=2F\alpha(n-1)$. При $n=1,5$, $\alpha=0,1$ рад, $F=1$ м $2r=0,1$ м ▶.

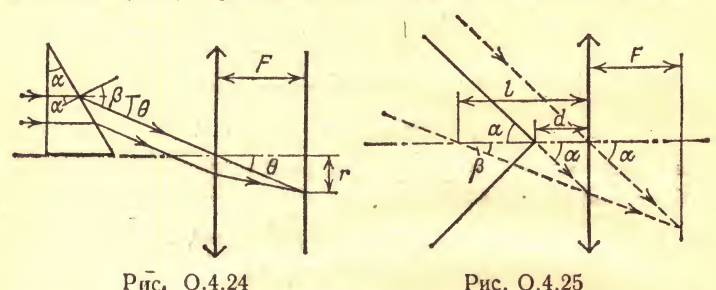


Рис. О.4.24 Рис. О.4.25

4.25. Направим луч вдоль поверхности конуса и посмотрим, как он пройдет сквозь лупу. Построение хода луча после лупы показано на рис. О.4.25. Изображение острия конуса будет мнимым. Пусть оно находится на расстоянии l от лупы. Тогда

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{l},\quad l\ \mathrm{tg}\ \beta=d\ \mathrm{tg}\ \alpha.$$

Отсюда искомый угол ◀ $2\beta=2\ \mathrm{arctg}\,[(1-d/F)\ \mathrm{tg}\ \alpha]$ ▶.

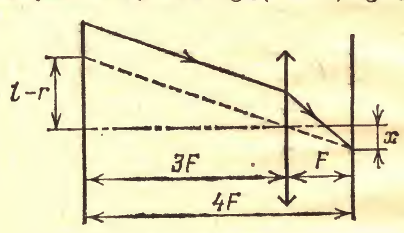


Рис. О.4.26

4.26. Построим изображения тени, учитывая, что пленка в фотоаппарате расположена в фокальной плоскости. Из построения (рис. О.4.26) следует, что

$$◀\ x=\frac{l-r}{3}\ ▶.$$

Можно найти область тени и другим способом, предварительно отыскав положение изображения линейки.

4.27. Маленькая часть жука, линейный размер которой равен x, дает изображение размера x' (рис. О.4.27). Освещенность изображения $E=\Phi/S$, где $\Phi \sim x^2\Omega$ — световой поток, исходящий от части

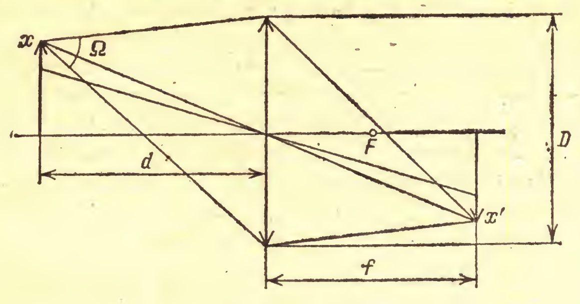


Рис. О.4.27

жука, размер которой равен x, и распространяющийся в телесный угол $\Omega \sim D^2/d^2$, а $S \sim (x')^2$. Поскольку $x/x'=d/f$, получаем

$$E \sim \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{D^2}{d^2} = \frac{D^2}{f^2} = \frac{D^2(d-F)^2}{d^2F^2}.$$

В последнем равенстве величина f выражена через расстояние d и фокусное расстояние F по формуле линзы. Приравнивая освещенности для $d_1=3F$ и $d_2=5F$ и разных диаметров диафрагмы объектива, получаем ◄ $\dfrac{D_1}{D_2}=\dfrac{d_1(d_2-F)}{d_2(d_1-F)}=\dfrac{6}{5}$ ►.

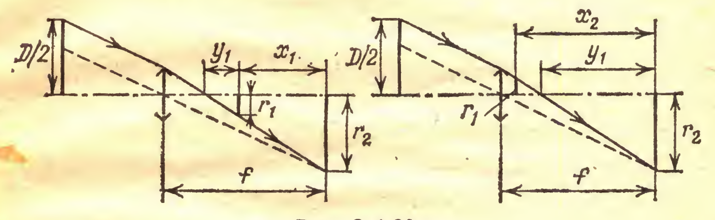


Рис. О.4.28

4.28. Из построений на рис. О.4.28 следует, что

$$\frac{D}{2(F-x_1-y_1)}=\frac{r_1}{y_1}, \quad \frac{r_2}{r_1}=\frac{x_1+y_1}{y_1};$$

$$\frac{D}{2(F-y_2)}=\frac{r_2}{y_2}, \quad \frac{r_2}{r_1}=\frac{y_2}{x_2-y_2};$$

$$◄ \quad x_{1,2}=2F\frac{r_2 \mp r_1}{D+2r_2} \quad ►.$$

4.29. Параллельный пучок дает изображение в фокальной плоскости: ◄ $r=F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ►. Если же размер линзы таков, что $r/F<\mathrm{tg}\,\alpha$,

то минимальный размер пятна, равный диаметру линзы ◀ d ▶, получается, если прижать линзу вплотную к экрану.

4.30. Отразившись от зеркала, свет вторично проходит через ту же линзу, так что посеребрение плоской поверхности линзы эквивалентно удвоению ее оптической силы, что уменьшает вдвое фокусное расстояние линзы: ◀ $F'=F/2$ ▶.

4.31. ◀ $SS'=l+F(1+1/\cos\alpha)$ ▶.

4.32. Проведем луч из источника S так, чтобы, пройдя через первую линзу, он далее прошел через фокус второй линзы (рис. О.4.32).

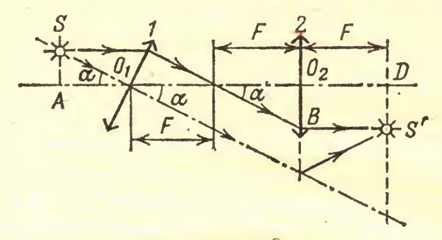


Рис. О.4.32

Тогда за первой линзой этот луч пойдет параллельно ее главной оптической оси, а за второй линзой — параллельно главной оптической оси этой линзы и пересечет фокальную плоскость в точке S'. Эта точка и есть изображение источника S в системе данных линз. Опустим перпендикуляр SA на прямую O_1O_2:

$$O_1A=F\cos\alpha,\quad O_2B=F\sin\alpha=DS',$$
$$AD=AO_1+O_1O_2+O_2D=3F+F\cos\alpha.$$

Расстояние между источником S и его изображением S' по вертикали $H=SA+DS'$, $DS'=F\operatorname{tg}\alpha$; $H=F\sin\alpha(1+1/\cos\alpha)$. Таким образом,

◀ $SS'=(H^2+AD^2)^{1/2}=F[(1+1/\cos\alpha)^2\sin^2\alpha+(3+\cos\alpha)^2]^{1/2}$ ▶.

4.33. Рассмотрим два луча, идущих от источника света. Пусть первый луч идет, совпадая с оптической осью первой линзы. Эту линзу он пройдет без преломления. Вторая линза преломит луч так, что он пересечет ее оптическую ось в ее же фокусе. Пусть второй луч идет в точку пересечения плоскости первой линзы с оптической осью второй линзы. Так как источник расположен на двойном фокусном расстоянии от линзы, этот луч пойдет после преломления симметрично падающему, а после второго преломления он пойдет параллельно оптической оси второй линзы (так как выходит из ее фокуса).

Изображение источника (точка пересечения двух рассмотренных лучей) находится на расстоянии $F/2$ от преломляющей плоскости второй линзы и на расстоянии $h/2$ от главных оптических осей обеих

линз. Искомое расстояние

$$◀\ SS'=\frac{1}{2}\sqrt{49F^2+h^2}\ ▶.$$

Примечание. При построении хода лучей вместо линзы конечных размеров можно рассматривать преломляющую плоскость.

4.34. ◀ $D=4D_0/3\approx 2{,}6$ см ▶.

4.35. Пусть d_1 — расстояние от изображения источника света S, которое дает линза без отражения света от зеркал, до линзы. Тогда

$$\frac{1}{1{,}5F}+\frac{1}{d_1}=\frac{1}{F}, \quad d_1=3F.$$

После отражения света от зеркал изображение возникает на расстоянии $2F$ от ребра двугранного зеркала, то есть на расстоянии F слева от линзы (одно изображение в двугранном зеркале — такое же, как в обычном плоском, но перевернутое по сравнению с ним. Два боковых изображения мы не рассматриваем). Таким образом, на линзу падает сходящийся пучок света, пересекающийся за ней, что можно рассматривать как мнимое изображение с расстоянием до линзы $d_2=-F$. Линза еще раз преломит этот пучок света. Используя формулу линзы, получаем

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{-F}+\frac{1}{x}, \quad ◀\ x=\frac{F}{2}\ ▶.$$

Изображение действительное (пересекаются в найденной точке сами лучи, а не их продолжения).

§ 4. Фотометрия

4.36. ◀ $x=h\sqrt{n^{2/3}-1}$ ▶.

4.37. Вклад в освещенность экрана вносят сам источник света и три его мнимых изображения:

$$E=J\left(\frac{\cos\alpha_1}{l_1^2}+\frac{\cos\alpha_2}{l_2^2}+\frac{\cos\alpha_3}{l_3^2}+\frac{\cos\alpha_4}{l_4^2}\right)=$$

$$=\frac{J}{l^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{10\sqrt{10}}+\frac{1}{10\sqrt{10}}+\frac{1}{18}\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

где l_1, l_2, l_3, l_4 — расстояния от источника света и его изображений до точки A экрана, а углы α_1, α_2, α_3, α_4 ясны из построения изображений. Окончательно

$$◀\ E=\frac{J}{l^2}\cdot\frac{25\sqrt{5}+18}{45\sqrt{10}}\ ▶.$$

4.38. По закону преломления $\sin\beta=n\sin\alpha$. Освещенность изменится по двум причинам: во-первых, меняется угол падения на

экран, вместо угла, равного 0°,— угол $\beta-\alpha$; во-вторых, изменяется освещенная площадь экрана за счет изменения ширины пучка — вместо ширины AB получается ширина CD (рис. О.4.38). Таким образом,

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{GF}{AB}\cos(\beta-\alpha).$$

Найдем отношение GF/AB. Поскольку $GF\perp LC$, $ML\parallel AB$, $LM=AB$, $\angle MLF=\alpha$, $\angle LFG=\beta$, $LF=LM/\cos\alpha=AB/(\cos\alpha)$, то

$$GF=LF\cos\beta=AB\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\cos\beta.$$

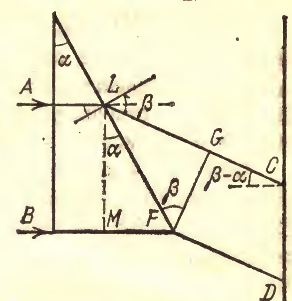


Рис. О.4.38

С учетом закона преломления окончательно получаем

$$◀\ \frac{E_2}{E_1}=(1-n^2\sin^2\alpha)^{1/2}\left[(1-n^2\sin^2\alpha)^{1/2}+n\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\right]\ ▶.$$

4.39. Раз зайчик круглый, значит, его форма определяется не формой зеркала, а формой Солнца, и, следовательно, освещенность в центре зайчика зависит от телесного угла, под которым из этой точки видно зеркало. Для точки B $\Omega_1=S\dfrac{\cos\alpha_1}{l_1^2}$. Пусть освещенность на стене вне зайчика равна E_0. Освещенность, создаваемая в точке B зайчиком, $E_B=3E_0+E_0=4E_0$:

$$4E_0=\frac{2kS}{l_1^2}\cos\alpha_1,$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности, дающий, в частности, и правильную размерность. Для точки C $\Omega_2=\dfrac{S}{l_2^2}\cos\alpha_2$. Освещенность, создаваемая зайчиком в точке C,

$$E_C=\frac{kS}{l_2^2}\cos\alpha_2\cdot\cos\beta,$$

где

$$l_1=l_2\cos\beta,\quad k=(2E_0l_1^2/S)\cos\alpha_1.$$

Таким образом,

$$E_C=E_0\left[1+2\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cos\beta\right].$$

Если считать, что $l_1\approx l_2$, то

$$E_C=E_0\left(1+2\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cos\beta\right).$$

По условию задачи $\beta=\pi/4$, $\alpha_1=\pi/8$, $\alpha_2=\pi/4$. Окончательно

$$◀ \ E_C=E_0\left[1+\frac{1}{\cos(\pi/8)}\right]\approx 1{,}5E_0 \ ▶.$$

Таким образом, изменение освещенности произошло по трем причинам: а) изменение расстояния от стены до зеркала (множитель $(l_1/l_2)^2$); б) изменение угла падения лучей в центре зайчика (множитель $\cos\beta$); в) отличие угла между направлением от зеркала к центру зайчика и плоскостью зеркала от 90° (множитель $(\cos\alpha_2)/(\cos\alpha_1)$).

4.40. Так как источник света находится в фокусе зеркала, то на пластинку справа падает параллельный пучок, отраженный, следовательно, с той же площади зеркала, что и площадь пластинки. Вследствие малости пластинки можно пренебречь изменением угла падения лучей, попадающих на нее. Тогда

$$◀ \ \frac{E_л}{E_п}=\frac{2l(h^2+r^2/4)^{3/2}}{r(h^2+l^2)^{3/2}}\approx\frac{lr^2}{4(h^2+l^2)^{3/2}} \text{ при } h\ll r \ ▶.$$

4.41. $E_С\approx\dfrac{J}{4\pi l_С^2}$, $E_Л\approx\dfrac{J\pi r^2}{4\pi l_С^2\cdot 2\pi l^2}$, где $E_С$ и $E_Л$ — освещенности поверхности Земли, создаваемые Солнцем и Луной, $l_С$ — расстояние от Солнца до Луны или Земли.

$$◀ \ n=\frac{E_Л}{E_С}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2\approx 1{,}2\cdot 10^{-5} \ ▶.$$

Глава V. ЗАДАЧИ-ОЦЕНКИ

5.1. При броске без разбега максимальная дальность полета гранаты $l\sim v_0^2/g$. Полагая, что за счет разбега гранате сообщается дополнительная горизонтальная скорость v и что вертикальная составляющая скорости $v_0\sin\alpha_0$ практически не меняется, а значит, не меняются и высота и время полета

$$t\sim\frac{2}{g}v_0\sin\alpha_0=\frac{2v_0}{\sqrt{2}\,g}$$

(для $\alpha_0=45°$, учитывая, что $v_0\sim\sqrt{lg}$), получаем увеличение дальности полета $\Delta l\sim tv\sim\sqrt{2l/g}\approx 30$ м при $v\approx 10$ м/с, $l\approx 50$ м.

5.2. Пусть объем воды в ванне равен SH, а время вытекания воды равно t, тогда $SH\sim S_0v_{ср}\cdot t$. Полагая среднюю скорость вытекания воды $v_{ср}\sim\sqrt{2gH}$ и взяв высоту уровня воды $H\approx 0{,}5$ м, площадь отверстия в ванне $S_0\approx 10^{-3}$ м², площадь ванны $S\approx 1$ м², получаем

$$t\sim\frac{SH}{\sqrt{2gH}\,S_0}\approx 3\text{ мин}.$$

5.3. За время перемещения t на длину кузова l центр тяжести машины наберет вертикальную скорость $v_{ц.т}\sim gl/v$, или угловую

скорость $\omega \sim v_{\text{ц. т}} \cdot 2/l \sim 2g/v$. Тогда число оборотов автомобиля $n \sim t_{\text{пад}}\omega/2\pi \sim \sqrt{2gH}/\pi v \approx 1{,}5$ при горизонтальной скорости $v = 30$ м/с.

5.4. Приняв скорость самолета $v \approx 3{,}3 \cdot 10^2$ м/с, имеем

$$x = [h(2v^2/10g - h)]^{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^2 \text{ м *)}.$$

5.5. Отклонение к западу обусловлено вращением Земли с угловой скоростью ω: $x \sim [\omega(R_З + h) - \omega R_З]t$, где высота полета снаряда $R = v_0^2/2g$, время полета снаряда $t \sim v_0/g$, $R_З$ — радиус Земли, $\omega = 2\pi/T$ — угловая скорость вращения Земли с суточным периодом T. Таким образом, отклонение снаряда к западу $x \sim (2\pi/T)v_0^3/2g^2 \sim 10^2$ м при $v_0 \approx 8 \cdot 10^2$ м/с.

5.6. Приравнивая выталкивающую силу силе тяжести, действующей на сферу радиуса r, и пренебрегая плотностью гелия по сравнению с плотностью воздуха $\rho \approx 1$ кг/м^3, получаем

$$r \sim \sqrt[3]{\frac{m}{\pi\rho}} \sim 10^2 \text{ м}.$$

5.7. По условию равновесия воздух действует на вертолет снизу вверх с силой, равной силе тяжести, действующей на вертолет. Слой воздуха между вертолетом и водой при небольшой высоте с такой же силой действует на воду, создавая в ней яму. Таким образом, вертолет вытесняет такую же массу воды, какую имеет сам (воздух между вертолетом и водой при этом играет роль передающего силу элемента и из рассмотрения может быть исключен). Выбрав массу вертолета $m \approx 10^4$ кг, длину лопастей $l \approx 5$ м, получаем глубину ямы

$$h \sim m/(\rho\pi l^2) \approx 0{,}1 \text{ м}.$$

5.8. Средняя глубина океана $H \approx 4$ км. Тогда $\Delta p \sim (2/3)\rho \cdot gH \approx 3 \cdot 10^7$ Па. При этом учтено, что океан занимает две трети поверхности Земли. Дополнительное давление пара воды Δp эквивалентно давлению слоя воды, который появился бы, если бы всю воду океана распределить слоем одинаковой глубины по всей поверхности Земли.

5.9. Изменение плотности воздуха $\Delta\rho \sim \rho$, а изменение давления воздуха в шахте $\Delta p \sim (\rho + \Delta\rho)gH \sim 2\rho gH \approx 2 \cdot 10^5$ Па, то есть $p = p_0 + \Delta p \approx 3 \cdot 10^5$ Па.

5.10. Лыжник не тонет, когда сила тяжести mg, действующая на него, уравновешена вертикальной составляющей силы действия воды на лыжи, которая пропорциональна $\rho v^2 S \cos\alpha \cdot \sin\alpha$, где S — площадь лыж, α — угол наклона их к горизонту. Если пренебречь

---

*) Здесь предполагается, что летчик выдерживает кратковременную (около 1 с) перегрузку, равную $11g$. (*Примеч. ред.*)

выталкивающей силой, то при $m=80$ кг, $S=0{,}4$ м²

$$\rho v^2 S(\cos\alpha)(\sin\alpha)\sim mg, \qquad v\sim\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\approx 2 \text{ м/с}.$$

5.11. Сравниваем моменты сил: $Fr\sim mg\cdot 2r$, где r — радиус зубчатого колеса, $2r$ — расстояние от оси этого колеса до педали, mg — сила тяжести, действующая на человека, равная максимальной силе давления на педаль. Получаем при $m\approx 70$ кг $F\sim 2mg\approx 1{,}4\cdot 10^3$H.

5.12. $\nu\sim(1/2\pi)\sqrt{g/l}\approx 0{,}5$ Гц при $l\approx 1$ м.

5.13. $F\sim 5\,mg$ (см. также задачу 1.118). При оценке предполагается, что вся масса гимнаста сосредоточена в его центре масс. Для $m\approx 70$ кг получаем $F\approx 3{,}5\cdot 10^3$ Н.

5.14. В отличие от полюса на экваторе наблюдаются два эффекта: во-первых, уменьшение веса тела за счет центростремительного ускорения $a_{\text{ц. с}}=\omega^2 r_З$ и, во-вторых, увеличение расстояния от поверхности Земли до ее центра.

Если использовать гидростатическую модель распределения давления внутри Земли, то получим, что давление в центре Земли, создаваемое «столбами вещества» от полюса до центра Земли, имеющими высоту $r_З - x$, и от экватора до центра Земли, имеющими высоту $r_З$, согласно закону Паскаля, должны быть равны. Учитывая, что ускорение свободного падения на полюсе равно g, а на экваторе — равно $g-\omega r_З^2$, получим

$$\rho g(r_З - x)\sim\rho\frac{g-\omega^2 r_З}{2}r_З.$$

Отсюда $x\sim r_З^2\omega^2 g=r_З^2 4\pi^2/(gT^2)$, где $T=1$ сут. Окончательно $x\approx 20$ км.

5.15. Средняя плотность вещества Солнца

$$\rho_С=\frac{M_С}{V_С}=\frac{3M_С}{4\pi R_С^3}.$$

Из второго закона Ньютона находим массу Солнца

$$m_З\frac{4\pi^2 r_С}{T^2}=\gamma\frac{m_З M_С}{r_С^2}.$$

Отсюда

$$\rho_С\sim\frac{24\pi\alpha^3}{T^2\gamma}\approx 1 \text{ г/см}^3,$$

где $\alpha=D_С/r_С\approx 0{,}01$ — угловой размер Солнца ($D_С$ — диаметр Солнца, $r_С$ — расстояние от Земли до Солнца), $T\approx\pi\cdot 10^7$ с $=1$ год, γ — гравитационная постоянная.

5.16. За время Δt на парашют площади S налетает со скоростью v воздух массы $\Delta m\sim\rho vS\Delta t$ и передает парашюту импульс Δmv. Таким образом, сила сопротивления воздуха $F=\Delta mv/\Delta t\sim\rho v^2 S$. Эта сила при установившемся движении уравновешивает силу тя-

жести, действующую на парашютиста, $\rho v^2 S \sim mg$, $v \sim \sqrt{mg/\rho\pi r^2} \approx$ ≈ 5 м/с при $m \approx 10^2$ кг, $r \approx 3$ м.

5.17. Приняв высоту подъема центра тяжести Δh при переворачивании равной примерно 0,5 м, имеем $v \sim \sqrt{2g\,\Delta h} \approx 3$ м/с.

5.18. $F = ma \sim mv^2/2l \approx 7 \cdot 10^3$ Н при массе человека $m \approx 60$ кг.

5.19. Грузовик массы m, имея в начале торможения скорость v, обладает кинетической энергией $mv^2/2$. Вся эта энергия переходит в тепло за время торможения $t \sim 2l/v$, где l — путь торможения. Средняя мощность, таким образом, $P \sim mv^2/2 : 2l/v = mv^3/4l$. При скорости $v \approx 60$ км/ч $= 16$ м/с, $m \approx 10^4$ кг, $l \approx 10$ м получаем $P \approx 10^6$ Вт, то есть в виде тепла выделяется мощность порядка мегаватта!

5.20. За время t кузнечик, распрямляя ногу длины l, набирает скорость v. Средняя мощность кузнечика

$$P \sim \frac{W_к}{t} \sim \frac{mv^2}{2t}, \quad \frac{vt}{2} \sim l, \quad v \sim \sqrt{2gH},$$

где H — высота полета кузнечика. Отсюда

$$\frac{P}{m} \sim \frac{v^3}{4l} \sim \frac{(2gH)^{3/2}}{4l}.$$

Полагая $l \approx 3 \cdot 10^{-2}$ м, $H \approx 1$ м, $g \approx 10$ м/с^2, имеем $P/m \sim (2gH)^{3/2}/4l \approx$ $\approx 0{,}8$ кВт/кг ≈ 1 кВт/кг.

5.21. Средняя сила при выдергивании гвоздя равна приблизительно средней силе F при его забивании. Из закона сохранения энергии получаем $F \sim 5mv^2/2l$. При массе молотка $m \approx 1$ кг, скорости его $v \approx 5$ м/с и длине $l \approx 10$ см сила, необходимая для выдергивания гвоздя, $F \approx 10^3$ Н.

5.22. Потенциальная энергия mgh переходит в работу силы реакции опоры, действующей на ноги человека. Человек гасит свою скорость, приседая на расстояние l, равное примерно половине его роста: $F \sim mgh/l \approx 3{,}5 \cdot 10^3$ Н при $m \approx 70$ кг, $h/l \approx 5$.

5.23. Работа силы равна $Fl \approx mv^2/2 \approx mgL/2$, то есть $F \sim mgL/2l \approx$ $\approx 8 \cdot 10^2$ Н, при массе ядра $m \approx 8$ кг, длине полета ядра $L \approx 20$ м, пути, проходимом ядром вместе с рукой при разгоне, $l \approx 1$ м.

5.24. $p = F/S \sim F/d^2$, где $F \approx 1$ Н, $d \approx 0{,}2$ мм — ширина следа, оставляемого шариком на бумаге; $p \approx 3 \cdot 10^7$ Па.

5.25. Разгоняется вода, а вместе с ней и снаряд. $v \sim \sqrt{gh} \sim$ $\sim 10^2$ м/с при $h \approx 1$ км.

5.26. Работа сил давления пороховых газов идет в основном на разгон пули: $p_{ср} Sl \sim mv^2/2$, где $S \approx 1$ см$^2 = 10^{-4}$ м^2; длина ствола $l \approx 0{,}5$ м, масса пули $m \sim 10$ г $= 10^{-2}$ кг, $v \approx 8 \cdot 10^2$ м/с; $p_{ср} \sim$ $\sim mv^2/(2Sl) \approx 6 \cdot 10^7$ Па.

5.27. Изменение импульса капли при ударе, равное mv, определяется произведением средней силы $F_{ср} \sim p_{ср} S$, действующей на каплю, на время взаимодействия капли со стеной $t \sim r/v$, где r — ра-

диус капли, а v — ее скорость. Таким образом, $mv \sim Ft$, или $\rho(4/3)\pi r^3 v \sim p_{ср}\pi r^2 \cdot r/v$, $v \sim \sqrt{p_{ср}/\rho} \approx 30$ м/с.

5.28. Используем гидростатическую модель распределения давления внутри Земли. Высота столба вещества равна радиусу Земли, $g_{ср}=g/2$. Давление $p \sim \rho g_{ср} r_З \sim \rho(g/2)r_З$, $\rho = M_З/V_З \sim 3g/(4\pi G r_З)$, то есть $p \sim 3g^2/(2\pi G) \sim 10^{11}$ Па.

5.29. Из второго закона Ньютона для небольшого объема воды получим $p = p_0 + \rho(gh + al_0) \approx p_0 + \rho(v^2/2l)l_0 \approx 1{,}4 \cdot 10^5$ Па при высоте цистерны $h \approx 1$ м, длине цистерны $l_0 \approx 5$ м (учтено, что ускорение машины $a \sim v^2/2l$).

5.30. Работа пороховых газов $A \sim Fl$, где l — длина части пули внутри гильзы. Так как $A = (p^2/2)(1/m_г + 1/m_п)$, то скорость пули

$$v = \frac{p}{m_п} = \frac{1}{m_п}\sqrt{2A\frac{m_г m_п}{m_г + m_п}}.$$

В ружье работа пороховых газов $A_0 \sim FL$, где L — длина разгона пули в стволе. Скорость пули при стрельбе $v_0 \sim (1/m_п)\sqrt{2A_0 m_п}$ без учета отдачи ружья. Скорость пули с учетом отдачи ружья

$$v \sim v_0\sqrt{\frac{A/A_0}{m_г/(m_г + m_п)}}.$$

Полагая силу давления пороховых газов F приблизительно постоянной и одинаковой в этих двух случаях, имеем

$$v \sim v_0\sqrt{\frac{l}{L(1 + m_п/m_г)}} \approx 40 \text{ м/с} \quad \text{при} \quad \frac{l}{L} \approx 10^2, \quad \text{а} \quad \frac{m_п}{m_г} \approx 3.$$

5.31. Из закона сохранения импульса $mv \sim Mu$, где m и v — масса и скорость молекул, M и u — масса и скорость мяча, $h \sim u^2/2g \sim m^2v^2/M^2 2g$, масса молекул

$$m \sim \frac{pV\mu}{RT} \approx 6 \text{ г}$$

при объеме мяча $V = (4/3)\pi r^3 = 4 \cdot 10^3$ см^3 (если $r \sim 10$ см). Полагая давление внутри мяча $p \approx 1{,}5\, p_0$, $\mu = 29$ г/моль, $M \approx 4 \cdot 10^2$ г, скорость молекул $v \approx 4 \cdot 10^2$ м/с и $g \approx 10$ м/с^2, получаем $h \approx 2$ м.

5.32. Масса кислорода в атмосфере Земли $M = (1/5)4\pi r_З^2 p_0/g$. Число молей взаимодействующих углерода и кислорода одинаковы, так как при сгорании угля идет химическая реакция $C + O_2 = CO_2$:

$$\frac{m_C}{\mu_C} = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}, \text{ то есть } m_{O_2} = m_C\frac{\mu_{O_2}}{\mu_C}.$$

Таким образом,

$$\frac{m_{O_2}}{M} \sim 5m_C\mu_{O_2}\frac{g}{4\pi r_З^2 p_0 \mu_C} \approx 5 \cdot 10^{-6},$$

так как $r_З \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, $p_0 \sim 10^5$ Па, $\mu_C = 12$ г/моль, $\mu_{O_2} = 32$ г/моль.

5.33. Средняя плотность вещества человека близка к плотности воды (человек, почти полностью погрузившись в воду, может неподвижно лежать, находясь в состоянии равновесия). Плотность воды ρ_0 известна. Объем человека можно оценить по формуле $V=m/\rho_0$, где m — его масса. Выталкивающая сила F равна плотности воздуха ρ, умноженной на объем человека V и на ускорение свободного падения g: $F\sim mg\cdot\rho/\rho_0\approx 1$ Н при $m\approx 75$ кг.

5.34. С учетом сохранения объема аудитории и давления в ней по закону Клапейрона — Менделеева получаем

$$\Delta m \sim m\,\Delta T/T=\rho V\,\Delta T/T,$$

где ρ — плотность воздуха, а V — объем аудитории. При $V\approx 2\cdot 10^3$ м³, $T\approx 300$ К, $\rho\approx 1{,}3$ кг/м³ получаем $\Delta m\approx 80$ кг.

5.35. Так как объем и масса газа в баллоне сохраняются, то по закону Шарля $p_0/T=p/T_0$, где p_0 и T_0 — атмосферное давление и температура. Давление внутри выключенной лампочки выбирается таким, чтобы после нагрева поднявшееся давление p нагретого до температуры T газа сравнялось с внешним p_0. Тогда $p=p_0T_0/T$. Выбрав $T_0\approx 300$ К, $T\approx 400$ К, получаем $p=3p_0/4\approx 0{,}7\cdot 10^5$ Па.

5.36. Давление в остывающей медицинской банке падает. В результате возникает сила F, прижимающая банку к спине. Пусть температура и давление газа в горячей банке равняются T_1 и p_1, а в остывшей — T_2 и p_2, тогда $F\sim(p_1-p_2)S$. Масса и объем воздуха в банке постоянны, поэтому $p_1/T_1=p_2/T_2$. Откуда

$$p_2=p_1\frac{T_2}{T_1},\quad F\sim p_1\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)S=p_1S\,\frac{\Delta T}{T_1}.$$

Пусть $\Delta T\approx 100$ К, $T_1\approx 400$ К, $S\approx 10$ см², $p_1=10^5$ Па. Тогда $F\approx 25$ Н.

5.37. Выберем размеры матраца: длина $l\approx 2$ м, ширина $h\approx 0{,}5$ м, толщина $d\approx 0{,}1$ м. Работа A силы F на пути $(\pi/2)(l/2)$ при сгибании матраца приблизительно равна $p\,\Delta V$, где p — избыточное давление в матраце ($p\approx 10^4$ Па), а ΔV — изменение объема матраца, возникшее из-за изменения его формы в области сгиба ($V\sim d^2h$). Таким образом, $F(\pi/2)(l/2)\sim p\,d^2h$, откуда $F\sim 4p\,d^2h/(\pi l)\approx 30$ Н.

5.38. При оценке скорости воздуха можно рассуждать так. Объем легких $V\sim Svt$, где S — сечение трубки, v — скорость воздуха, t — время выхода. При $S\approx 0{,}5$ см², $V\approx 5$ л, $t\approx 5$ с получаем $v\sim V/(St)\approx 20$ м/с.

Другой подход дает несколько иную оценку. Человек ртом может создать перепад давления $\Delta p\approx 10^4$ Па. Но $\Delta p\approx\rho v^2$, отсюда $v\sim\sqrt{p/\rho}\approx 30$ м/с.

5.39. Объем газа, выходящего через отверстие площади S со скоростью v в течение времени t, равен $vSt\sim V/2$. Скорость выхода газа v можно оценить или по его температуре ($mv^2/2\sim 3kT/2=3RT/2N_A$), или просто приравняв скорость газа v скорости звука

$c \approx 3 \cdot 10^2$ м/с. Пусть объем спутника $V \approx 1$ м^3 и $S = 10^{-4}$ м^2 при $v \approx 3 \cdot 10^2$ м/с, тогда получаем $t \sim V/(2vS) \approx 10$ с.

5.40. Число ходов насоса $n = m_м/m_н \sim V_м p_м / V_н p_0$ (при каждом ходе насоса в камеру мяча поступает одно и то же количество воздуха: $m_н \sim p_0 lS\mu/RT$), пока мяч не будет надут и масса воздуха в нем не станет равной $m_м = p(4\pi/3)r^3\mu/RT$. Выбирая радиус мяча $r \approx 10$ см, давление $p \approx 1{,}5\ p_0$, рабочий объем насоса $V_н = lS \approx 2 \times 10^2$ см^3, получаем $n \approx 30$.

5.41. Дополнительным давлением, создаваемым резиновой оболочкой, можно пренебречь. Выталкивающая сила, действующая на шарик, равна $m_0 g = pV\mu g/RT_0$, где T_0 — температура окружающего воздуха. Масса нагретого до температуры T воздуха $m = pV\mu/RT$. Тогда, если M — масса резиновой оболочки, получаем условие подъема шарика: $m_0 g \geqslant (M+m)g$. Отсюда

$$T > \frac{T_0}{1 - MRT_0/pV\mu}.$$

При $M \approx 5$ г, диаметре шара $2r \approx 35$ см, $T_0 \approx 300$ K и $p \approx 10^5$ Па получаем, что критическая температура $T_{кр} \approx 500\ \text{K} \approx 200$°C.

5.42. Энергия подводного взрыва $m\lambda$ идет в основном на работу против сил гидростатического давления pV. Тогда

$$r = \left(\frac{3m\lambda}{4\pi\rho g h}\right)^{1/3} \approx 5\ \text{м}.$$

5.43. Минимальный угловой размер, еще различимый глазом, $\alpha = h/L \sim 10^{-3}$ (до таблицы, на которой различаются миллиметровые детали размера h, расстояние L равно нескольким метрам. Выбрав фокусное расстояние глаза $F \approx 2$ см (размер глазного яблока), имеем $\alpha = h/L \sim x/F$, $x \sim F\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5}$ м.

Если исходить из дифракционных ограничений глаза, то $\alpha_{диф} \sim \lambda/D$, где $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см — длина световой волны, а $D \approx 2$—3 мм — диаметр зрачка. Тогда $x \sim F\lambda/D \sim 10^{-5}$ м.

5.44. Свет, падающий на линзу диаметра $D_0 \approx 5$ см, собирается в фокальной плоскости, формируя пятно — изображение Солнца диаметра $D \approx \alpha F = D_С F/r_С$, где α — угловой размер Солнца, равный отношению диаметра Солнца $D_С$ к расстоянию $r_С$ от Земли до Солнца. Угловой размер $\alpha \approx 0{,}01$. Отношение β мощности излучения, падающего на линзу, к мощности излучения, падающего на экран, обратно пропорционально отношению площадей линзы и изображения Солнца на экране: $\beta = D_0^2/D^2 = (D_0/\alpha F^2) \approx 4 \cdot 10^2$ при $F = 25$ см (оптическая сила линзы равна 4 дптр).

5.45. При скорости иглы v и периоде колебаний T характерного звука соответствующий размер неоднородности $l \sim vT \sim v/f$, где f — частота звука. Выбрав радиус звуковой дорожки $r \approx 10$ см и учиты-

вая, что число оборотов в минуту для долгоиграющей пластинки $\nu=33$ мин$^{-1}\approx 0{,}5$ с$^{-1}$, имеем $v=\omega r=2\pi\nu r\approx 30$ см/с.

Полагая характерную частоту звука $f\sim 10^3$ Гц, получаем $l\sim 2\pi\nu R/f\approx 3\cdot 10^{-2}$ см.

Глава VI. ЗАДАЧИ-ДЕМОНСТРАЦИИ

6.1. Гвозди намагничиваются. Возникают магниты, одноименные полюсы которых расположены рядом. Но одноименные магнитные полюсы отталкиваются. В точках подвеса отталкиванию препятствует трение, а внизу концы гвоздей, висящие свободно, расходятся в соответствии с действием силы магнитного отталкивания и силы тяжести.

6.2. Предположим, что гвоздь вытаскивают, не расшатывая его (при расшатывании просто расширялся бы тот канал, в котором находится гвоздь). Основной причиной облегчения выдергивания гвоздя при его проворачивании является изменение направления силы трения, которая при проскальзывании направлена против скорости. Согнутый гвоздь проворачивать нетрудно (большое плечо силы — большой момент силы при малой самой силе), а сила вытягивания резко уменьшается, так как надо компенсировать не всю силу трения, направленную против полной скорости гвоздя, а лишь ее составляющую, направленную вдоль гвоздя.

6.3. Наибольшая дальность отскока получится, если составляющая переданного шарику импульса, направленная вдоль нити, будет минимальна (то есть если в момент удара линия, соединяющая центры шарика и препятствия, перпендикулярна нити, то составляющая импульса вдоль нити равна нулю и дальность отскока получится наибольшей из всех возможных). При смещении по горизонтали круглого препятствия составляющая импульса, переданного шарику, направленная после удара вдоль нити, увеличивается, и значит уменьшается доля энергии, идущая на движение шарика по горизонтали. Импульс, направленный вдоль нити, и связанная с ним кинетическая энергия оказываются потерянными из-за неупругости нити.

6.4. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что при упругом ударе двух одинаковых шариков происходит обмен их импульсами. Поэтому в первом случае скатившийся с горки шарик *1* передаст свой импульс ближнему шарику *2*, а сам остановится. Тот в свою очередь передает этот импульс шарику *3*, а сам останется неподвижным. Таким образом, будет двигаться лишь крайний шарик *3*.

Если между скатившимся с горки шариком *1* и шариком *2* помещена толстая резина, то ее роль сводится к продлению времени передачи импульса шарику *2*.

Рассмотрим по этапам процесс передачи импульса, который на самом деле носит плавный характер. Резина передает импульс шарику *2*, а тот — шарику *3*. Передаваемый резиной шарику *2* импульс в течение некоторого времени возрастает, и, следовательно, возрастает и импульс, передаваемый шариком *2* шарику *3*. Шарик *2* будет как бы догонять в течение времени передачи резиной импульса шарик *3* и добавлять ему импульс. Это будет продолжаться до тех пор, пока шарик *2* не оторвется от резиновой прокладки. После этого оба шарика *2* и *3* покатятся с неменяющимися и почти равными скоростями.

6.5. В первом случае в отсутствие препятствия сила трения преодолевается при натягивании нити по горизонтали. Когда нить отпущена, горизонтальная сила трения покоя держит подставку.

Во втором случае до столкновения маятника с препятствием подставка неподвижна, как и в первом случае. А после столкновения импульс шарика mv за укороченное (из-за уменьшения длины маятника) время $\Delta t \sim \pi\sqrt{l/g}$ передается подставке, и, следовательно, та же сила трения преодолевается большей горизонтальной силой.

Можно подойти к объяснению и иначе. Горизонтальная составляющая силы натяжения легко выражается через углы отклонения нити от вертикали: $T_{\text{гор}} = mg\sin\alpha\,(3\cos\alpha - \cos\alpha_0)$.

Чем больше максимальный угол отклонения маятника α_0, тем больше горизонтальная сила. После удара нити о препятствие максимальный угол отклонения увеличивается. Возрастают и средняя горизонтальная составляющая силы, преодолевающая силу трения покоя и ее максимальное значение. Это и приводит к смещению подставки в направлении от руки к препятствию.

6.6. Во втором случае гильзе и стержню передаются равные импульсы, но стержень закреплен, его скорость остается равной нулю. Поэтому почти вся энергия идет на разгон гильзы. В первом же случае заметная доля энергии передается стержню, и высота полета гильзы должна быть заметно ниже. Несложно сделать оценки (m — масса гильзы, M — масса стержня):

$$W_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2M},$$

отсюда

$$p_1 = \sqrt{2W_1\frac{mM}{m+M}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2W_1M}{m(m+M)}}, \quad W_2 = \frac{p_2^2}{2m},$$

отсюда

$$v_2 = \frac{p_2}{m}\sqrt{\frac{2W_2}{m}}.$$

Высота взлета $h=v^2/2g$. Поэтому

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{M}{m+M}.$$

Если массы гильзы и стержня сравнимы: $m\approx M$, то высота h_2 не меньше чем вдвое превышает h_1. Если же различие масс велико: $m\gg M$, то $h_2/h_1\approx m/M\gg 1$, то есть и различие в высотах велико.

6.7. Игрушка «водолаз» должна быть эластичной (например, резиновой), чтобы, сдавливая ее, можно было заставить ее тонуть (при уменьшении объема выталкивающая сила, направленная вверх, уменьшается и перестает компенсировать неизменную силу тяжести, действующую на игрушку).

Существует критическая глубина, начиная с которой под влиянием только гидростатического и атмосферного давления игрушка сжата уже настолько, что выталкивающая сила меньше силы тяжести, действующей на нее.

Если к моменту устранения дополнительного давления, вызванного поддувом воздуха, игрушка достигла критической глубины, то она начнет тонуть. Ее объем будет продолжать уменьшаться, и, следовательно, условия всплытия будут нарушаться все сильнее. «Водолаз» уже не всплывет.

Если же «водолаз» не успел дойти до критической глубины, то он начнет все стремительнее всплывать, увеличивая при этом свой объем.

6.8. При нагреве воздуха его плотность уменьшается ($\rho=p\mu/RT$) и начинается конвекция: менее плотный нагретый воздух, обедненный кислородом, всплывает. На его место поступает более холодный воздух, обеспечивая тем самым приток к пламени необходимого для горения кислорода. При этом эти встречные потоки тормозят друг друга и частично перемешиваются. При нехватке кислорода пламя коптит (содержит большое количество несгоревшего, неокислившегося углерода — сажи).

В трубке создается заметный поток воздуха, обусловленный разностью давлений на ее концах. При этом взаимодействие со встречным потоком отсутствует, поэтому скорость потока холодного воздуха велика (воздух в восходящую струю попадает лишь снизу, где давление максимально) и продукты сгорания быстро удаляются из области горения. Когда же трубка закрыта, нагретый воздух уже не может выйти вверх, начинает выходить снизу и ощутимо ограничивает доступ свежему воздуху. Пламя может погаснуть.

6.9. В начальный момент манометр показывает резкое падение давления. Оно обусловлено в основном увеличением объема воздуха под поршнем. Затем давление увеличивается, превышая первоначальное значение. Это связано с тем, что ацетон интенсивно испаряется, при этом давление его пара, а значит и суммарное давление

пара и воздуха, увеличивается. Росту давления способствует и рост температуры смеси до температуры окружающей среды.

6.10. После надевания каркаса разность потенциалов между сеткой и вертушкой становится равной нулю. Заряды перестают стекать с вертушки. Момент сил, ранее заставлявший вертушку вращаться, обращается в нуль.

6.11. Под действием поля внутри конденсатора на шарике индуцируются заряды. Они распределяются по поверхности шарика так, чтобы заряды, одноименные с зарядом одной пластины конденсаторов, расположились дальше от нее, а разноименные — ближе к ней. Это приводит к возникновению силы, притягивающей шарик к ближайшей из пластин. При соприкосновении шарика с пластиной на него переходит заряд, одноименный с зарядом пластины, возникает отталкивание от этой пластины и притяжение к другой. Далее все повторяется. Шарик переносит на себе заряды с одной обкладки конденсатора на другую.

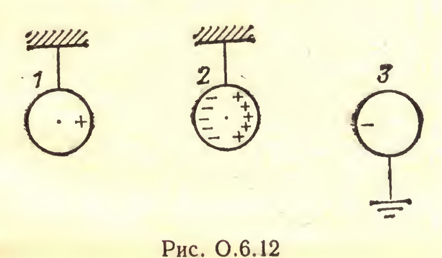


Рис. О.6.12

6.12. Под действием поля заряженного шара *1* на изолированном шаре *2* перераспределяются заряды (рис. О.6.12). На заземленном шаре *3* индуцируется заряд, знак которого противоположен знаку заряда на шаре *1*. Когда шар *2* находится далеко от шара *1*, сила притяжения, действующая со стороны шара *3*, больше, чем со стороны шара *1*. На некотором расстоянии (его всегда можно подобрать) сила притяжения, действующая со стороны шара *1*, становится больше, и шар *2* отклонится теперь уже к нему.

6.13. В сплошном кольце индуцируется кольцевой вихревой ток такого направления, что его взаимодействие с магнитным полем катушки приводит к отталкиванию кольца (вдоль стержня) от катушки. Когда кольцо разрезано, такой кольцевой ток возникнуть не может, и выталкивание кольца не наблюдается.

6.14. В пространстве между катушками с переменным током возникает переменный магнитный поток. В металлическом листе наводятся вихревые токи так, чтобы создаваемое ими магнитное поле компенсировало изменение потока через металлический лист. Катушки отталкиваются от медного листа, а следовательно, и друг от

друга. Железный лист — ферромагнетик. При его намагничивании появляется притяжение между листами и катушками, которое оказывается сильнее отталкивания, возникающего за счет вихревых токов.

6.15. При разомкнутых концах взаимодействие медной проволоки с магнитным полем практически отсутствует и колебания почти не затухают.

При замкнутых концах в витках катушки при ее попадании в магнитное поле наводится индукционный ток, причем, по правилу Ленца, такого направления, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока через катушку. В результате на переднюю часть витка, вошедшего в сильное поле $\boldsymbol{B}_1$, действует сила $\boldsymbol{F}_1$, направленная против движения. На другую часть витка, находящуюся в периферийной области поля, где оно значительно слабее ($B_2 \ll B_1$, поле неоднородно), действует сила $\boldsymbol{F}_2$ противоположного направления. Но $F_2 \ll F_1$, поэтому результирующая сила тормозит движение.

При выходе из поля возникает результирующая сила, препятствующая выходу. Индукционные токи приводят к тепловым потерям энергии в проводе катушки, в результате чего колебания быстро затухают.

6.16. Частоты колебаний ω_1 и $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ отличаются на небольшую величину $\Delta\omega$. При сложении возникают биения:

$$\sin\omega_1 t + \sin(\omega_1 t + \Delta\omega t) = 2\cos(\Delta\omega t/2)\cdot\sin\left(\omega_1 t + \frac{\Delta\omega t}{2}\right) \approx$$
$$\approx 2\cos(\Delta\omega t/2)\sin\omega_1 t.$$

Амплитуда биений $2\cos(\Delta\omega t/2)$ медленно периодически увеличивается и уменьшается. Это и соответствует усилению и ослаблению звука.

6.17. Возбужденные в струне стоячие волны образуют систему узлов и пучностей. В пучности взаимодействие магнитного поля магнита с током в струне максимально и приводит к увеличению амплитуды и, следовательно, громкости звука. Для узла изменение минимально.

6.18. Волна, идущая от динамика, интерферирует с волной, отраженной от поршня, и образует стоячую волну.

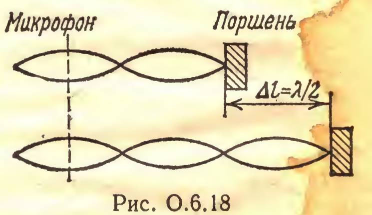


Рис. О.6.18

На поршне всегда узел, то есть минимум колебаний. Громкость на втором динамике будет максимальной, когда микрофон находится в пучности стоячей волны (рис. О.6.18). Если поршень сдвинуть на расстояние $\Delta l = \lambda/2$, то микрофон опять будет находиться в пучности волны. Измеряя Δl и зная частоту волны ν, можно вычислить скорость звука $c = \lambda\nu = 2\nu\,\Delta l$.

6.19. Если на динамик подается напряжение $U_x = U_д \cos \omega t$, то с микрофона снимается запаздывающее по фазе напряжение $U_y = U_м \cos(\omega t + \varphi) = U_м \cos[\omega(t - t_0)]$, где сдвиг по фазе обусловлен временем t_0 прохождения звуком расстояния от динамика до микрофона. Световое пятно на экране, таким образом, участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты, но разных амплитуд, имеющих сдвиг фазы.

В общем случае на экране виден эллипс. Если сдвиг фазы $\varphi = \pi k$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, то эллипс вырождается в отрезок с углом наклона к горизонтальной оси $\alpha_{\pm} = \operatorname{arctg}(y/x) = \operatorname{arctg}(U_м/U_д)$.

Сдвиг фазы $\varphi = \omega t_0 = \omega l/c$, где c — скорость звука. В случае вырождения эллипса в отрезок по величинам l_k, ω, используя связь $\pi k = \omega l/c$, можно определить скорость звука:

$$2\pi = (\omega/c)\,|l_k - l_{k\pm1}|, \quad c = |l_k - l_{k\pm1}|\,/T.$$

6.20. При вдвигании железного сердечника индуктивность катушки и, следовательно, ее индуктивное сопротивление возрастают. Свечение лампочки при увеличении индуктивности первой катушки будет возрастать, если эта катушка включена в цепь параллельно лампочке. Аналогично, свечение лампочки при увеличении индуктивности второй катушки будет уменьшаться, если катушка включена в цепь последовательно с лампочкой. Таким образом, приходим к схеме, изображенной на рис. О.6.20.

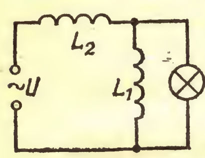


Рис. О.6.20

6.21. Очевидно, что один из источников дает постоянное напряжение, а второй — переменное. При переменном токе дуга существенно слабее, чем при постоянном (проявляется большее реактивное сопротивление катушки индуктивности).

6.22. Поскольку реактивные сопротивления ωL и $1/\omega C$ имеют разные знаки (противоположны по фазе), то при замыкании ключа *2*, если $\omega L \sim 1/\omega C$, происходит их компенсация и переменный ток через лампочку возрастает по сравнению со случаем отключенной емкости.

6.23. Три белых полосы постоянно видны лишь в том случае, если за время между двумя вспышками полоса, совершив любое число оборотов, сдвинется на угол $2\pi/3$ или $4\pi/3$. Полный угол поворота полосы $\varphi_1 = 2\pi k + 2\pi/3$ или $\varphi_2 = 2\pi k + 4\pi/3$, где k — любое целое число. Таким образом,

$$\varphi_1 = 2\pi\frac{3k+1}{3}, \quad \varphi_2 = 2\pi\frac{3k+2}{3}, \qquad \text{то есть} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}n,$$

где n — любое число, не кратное 3. Угловая скорость вращения диска, таким образом, равна $\nu \cdot 2\pi n/3$.

6.24. Интерференция света в этом опыте наблюдаться не может, так как электрическая лампочка — источник некогерентного излучения. На рис. О.6.24 изображена схема эксперимента. Здесь S — лампочка, S' и S'' — ее первые изображения в зеркалах (в действительности изображений бесконечно много, но для объяснения явления достаточно рассмотреть лишь два изображения). На участок

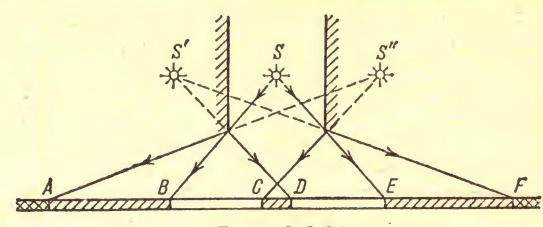


Рис. О.6.24

CD экрана падает лишь прямой свет от лампочки, а на участок BC и DE падает как прямой свет, так и свет, отраженный от зеркала. Вот почему участки BC и DE выглядят светлее участка CD. Далее картина повторяется по обе стороны от центральной полосы.

6.25. При наличии воды стеклянные пластины практически не препятствуют распространению света, так как показатели преломления стекла и воды близки, среда оказывается оптически почти однородной (вспомните — погруженное в воду стекло становится невидимым). В отсутствие воды возникает большое число отражений от пластин и световой поток ослабляется: изображение исчезает.

6.26. Когда на пути параллельного пучка встает стеклянная пластина, фототок уменьшается, так как часть светового потока стекло отражает. Такой же эффект потери части света, конечно, существует и для лампочки накаливания. Однако лучи света, падающие под углом на плоскопараллельную пластинку, смещаются, пройдя ее. Таким образом, часть потока, прежде не попадавшая на фотоэлемент, теперь дает дополнительный вклад, который при соответствующем подборе условий превысит эффект потерь.

6.27. Если экран помещен за двойным фокусным расстоянием линзы, возникает характерное распределение света, объясняемое с помощью рис. О.6.27. В области AB и EF проходит свет прямого пучка, в области CD распределяется свет, попавший на линзу, но после прохождения фокуса распределившийся по большей, чем у линзы, площади размером BE, в результате чего кружок CD освещен слабее, чем область прямого пучка. Наконец, участки BC и ED освещаются светом как прямого пучка, так и пучка, рассеянного линзой. Отсюда — наблюдаемая на экране кольцевая структура.

6.28. Как видно из построений рис. О.6.28 полоска разбивает световой поток на два формирующих размытые изображения пред-

мета. Штриховой линией указано положение экрана, при котором эти изображения сливаются в одно резкое. Правильное объяснение эффекта получается и если рассматривать незакрытые части объектива как две разнесенные линзы.

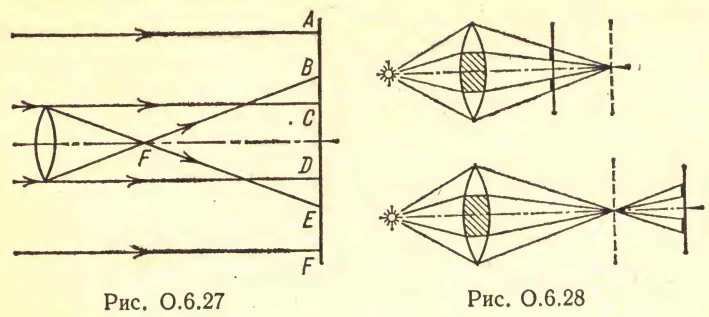


Рис. О.6.27

Рис. О.6.28

6.29. Вследствие охлаждения банки на ее поверхности конденсируется водяной пар, что приводит к помутнению отражающей поверхности (появляются капельки росы или даже иней, если температура охлажденной поверхности ниже нуля). Вместо отражения в определенном направлении свет начинает рассеиваться в довольно широком диапазоне углов. В итоге освещенность экрана в области первоначального зайчика уменьшается.

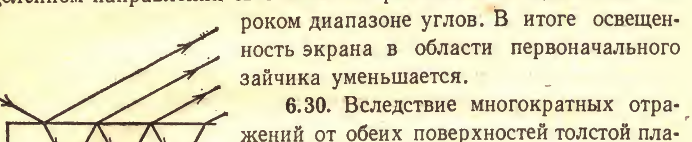


Рис. О.6.30

6.30. Вследствие многократных отражений от обеих поверхностей толстой пластины (рис. О.6.30) наблюдается несколько вышедших по обе стороны пластины пучков, последовательно ослабленных, так как каждый раз при встрече с поверхностью пластины пучок частично отражается поверхностью, а частично преломляется. Самыми яркими должны быть самые крайние пятна.

6.31. Число рассеивающих и поглощающих свет частиц вдоль оси не меняется при разбавлении, поскольку площадь сечения сосуда неизменна, полное число частиц сохраняется и, значит, число частиц, встреченных светом на пути вдоль оси, сохраняется (во сколько раз увеличивается путь, во столько же раз уменьшается концентрация молока, воду считаем абсолютно прозрачной).

При прохождении света поперек оси из-за уменьшения числа частиц в единице объема при разбавлении уменьшается и число частиц, встреченных светом на этом пути (концентрация уменьшилась, а путь остался прежнем). Таким образом, в последнем случае больше света пройдет при разбавлении, а в первом разбавление практически не отражается на интенсивности прошедшего сигнала.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Элементарный учебник физики: Учебное пособие. В 3-х т. / Под ред. Г. С. Ландсберга.— 10-е изд., перераб.— М.: Наука, 1985.
2. *Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С.* Физика в примерах и задачах.— М.: Наука, 1983.
3. *Брук Ю. М., Стасенко А. Л.* Как физики делают оценки — метод размерностей и порядки физических величин.— В кн.: О современной физике — учителю.— М.: Знание, 1975.
4. *Перельман Я. И.* Занимательная физика. В 2-х кн.— М.: Наука, 1982.
5. *Маковецкий П. В.* Смотри в корень.— М.: Наука, 1984.
6. *Уокер Дж.* Физический фейерверк (вопросы и ответы по физике): Пер. с англ./ Под ред. И. Ш. Слободецкого.— М.: Мир, 1979.
7. *Коган Б. Ю.* Сто задач по физике.— М.: Наука, 1985; Размерность физической величины.— М.: Наука, 1968.
8. *Ланге В. Н.* Физические парадоксы, софизмы.— М.: Просвещение, 1967.
9. *Енохович А. С.* Справочник по физике и технике.— М.: Просвещение, 1976.
10. *Гольдфарб Н. И.* Сборник вопросов и задач по физике.— М.: Просвещение, 1982.
11. Сборник задач по элементарной физике / Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев И. Я., Сараева И. М.— М.: Наука, 1974.
12. *Балаш В. А.* Задачи по физике и методы их решения.— М.: Просвещение, 1983.
13. *Тульчинский М. Е.* Занимательные задачи-парадоксы и софизмы по физике.— М.: Просвещение, 1971.
14. *Ащеулов С. В., Барышев В. А.* Задачи по элементарной физике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
15. Задачи по физике / Под ред. О. Я. Савченко.— М.: Наука, 1981.
16. *Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г.* Задачи по физике.— М.: Наука, 1980.— (Библиотечка «Квант», вып. 5).
17. *Слободецкий И. Ш., Орлов В. А.* Всесоюзные олимпиады по физике.— М.: Просвещение, 1982.
18. Сборник задач по физике / Под ред. С. М. Козела.— М.: Наука, 1983.

Приложение

ЕДИНИЦЫ И РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИ

Определения единиц физических величин приведены для основных и дополнительных единиц СИ. Внесистемные единицы, допустимые к применению наравне с единицами СИ, отмечены кружком

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Длина	L	метр	м	**Основная единица** Метр представляет собой расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299792458 долю секунды
		°астрономическая единица длины	а. е.	1 а.е. $= 1,49598 \cdot 10^{11}$ м
		°световой год	св. год	1 св. год $= 9,4605 \cdot 10^{15}$ м
		°парсек	пк	1 пк $= 3,0857 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	L^2	квадратный метр	$м^2$	
		°гектар	га	1 га $= 10^4$ $м^2$
Объем	L^3	кубический метр	$м^3$	
		°литр	л	1 л $= 10^{-3}$ $м^3$
Плоский угол	—	радиан	рад	*Дополнительная единица* Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
		°градус °минута °секунда	...° ...′ ...″	1° = (π/180) рад 1′ = (π/10800) рад 1″ = (π/648000) рад
Телесный угол	—	стерадиан	ср	*Дополнительная единица* Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы
Время	T	**секунда**	**с**	**Основная единица** Секунда равна 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
		°минута °час °сутки	мин ч сут	1 мин = 60 с 1 ч = 3600 с 1 сут = 86400 с
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с	

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	м/с^2	
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	1 рад/с $=1$ с$^{-1}$
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с^2	1 рад/с$^2=1$ с$^{-2}$
Частота периодического процесса	T^{-1}	герц	Гц	1 Гц $=1$ с$^{-1}$
Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с$^{-1}$	
Масса	M	**килограмм** °тонна °атомная единица массы	кг т а. е. м.	**Основная единица** Килограмм равен массе международного прототипа килограмма 1 т $=10^3$ кг 1 а.е.м. $=1{,}6605655\cdot10^{-27}$ кг
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м^3	

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	м^3/кг	
Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с	
Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м^3/с	
Сила	LMT^{-2}	ньютон	Н	1 Н = 1 кг·м·с$^{-2}$
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2 = 1 м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$
Жесткость	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 1 кг·с$^{-2}$
Напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2 = 1 м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$
Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с	1 Па·с = 1 м$^{-1}$·кг·с$^{-1}$
Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м^2/с	
Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 1 кг·с$^{-2}$

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Импульс (количество движения)	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг·м/с	
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н·м	1 Н·м=1 м²·кг·с⁻²
Момент импульса (момент количества движения)	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м²/с	
Момент инерции	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг·м²	
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж=1 Н·м=1 м²·кг·с⁻²
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт=1 Дж/с=1 м²·кг·с⁻³
Температура (термодинамическая)	Θ	**кельвин** °градус Цельсия	**К** °С	**Основная единица** Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды $t/°C = T/K - 273{,}15$
Температурный коэффициент	Θ^{-1}	кельвин в минус первой степени	К⁻¹	

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Температурный градиент	$L^{-1}\Theta$	кельвин на метр	К/м	
Количество вещества	$\boldsymbol{N}$	**моль**	**моль**	**Основная единица** Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг
Молярная масса	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль	
Молярный объем	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	м³/моль	
Количество теплоты (теплота)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 Н·м = 1 м²·кг·с⁻²
Удельная теплота	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	1 Дж/кг = 1 м²·с⁻²
Молярная теплота	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль	1 Дж/моль = 1 м²·кг·с⁻²·моль⁻¹
Теплоемкость, энтропия	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	1 Дж/К = 1 м²·кг·с⁻²·К⁻¹

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	1 Дж/(кг·К) = 1 м²·с⁻²·К⁻¹
Молярная теплоемкость, молярная энтропия	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль·К)	1 Дж/(моль·К) = = 1 м²·кг·с⁻²·К⁻¹·моль⁻¹
Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 м²·кг·с⁻³
Плотность теплового потока	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²	1 Вт/м² = кг·с⁻³
Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м·К)	1 Вт/(м·К) = 1 м·кг·с⁻³·К⁻¹
Коэффициент теплопередачи	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на квадратный метр-кельвин	Вт/(м²·К)	1 Вт/(м²·К) = 1 кг·с⁻³·К⁻¹
Концентрация (плотность числа частиц)	L^{-3}	метр в минус третьей степени	м⁻³	
Молярная концентрация	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	моль/м³	
Коэффициент диффузии	L^2T^{-1}	квадратный метр в секунду	м²/с	

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Сила электрического тока	I	**ампер**	**А**	**Основная единица** Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	$А/м^2$	
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	1 Кл = 1 с·А
Поверхностная плотность электрического заряда	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	$Кл/м^2$	$1\ Кл/м^2 = 1\ м^{-2} \cdot с \cdot А$
Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	$Кл/м^3$	$1\ Кл/м^3 = 1\ м^{-3} \cdot с \cdot А$

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	1 В = 1 Вт/А = 1 м^2·кг·с$^{-3}$·А$^{-1}$
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	1 В/м = 1 Вт/(А·м) = 1 м·кг·с$^{-3}$·А$^{-1}$
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	1 Ом = 1 В/А = 1 м^2·кг·с$^{-3}$·А$^{-2}$
Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом-метр	Ом·м	1 Ом·м = 1 м^3·кг·с$^{-3}$·А$^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	1 См = 1 Ом$^{-1}$ = 1 м$^{-2}$·кг$^{-1}$·с^3·А^2
Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	1 См/м = 1 Ом$^{-1}$·м$^{-1}$ = 1 м$^{-3}$·кг$^{-1}$·с^3·А^2
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	1 Ф = 1 Кл/В = 1 м$^{-2}$·кг$^{-1}$·с^4·А^2

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Электрическая постоянная, абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-3}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад на метр	Ф/м	1 Ф/м = 1 $м^{-3} \cdot кг^{-1} \cdot с^{4} \cdot А^{2}$
Поток электрического смещения	TI	кулон	Кл	1 Кл = 1 с·А
Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	$Кл/м^2$	1 $Кл/м^2$ = 1 $м^{-2} \cdot с \cdot А$
Магнитный поток (поток магнитной индукции)	$L^{2}MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	1 Вб = 1 В·с = 1 $Тл \cdot м^2$ = 1 $м^{2} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Магнитная индукция (плотность магнитного потока)	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	1 Тл = 1 $В \cdot с/м^2$ = 1 $Вб/м^2$ = 1 $кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Индуктивность	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	1 Гн = 1 $м^{2} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Магнитная постоянная, абсолютная магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	1 Гн/м = 1 $м \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$

Продолжение

Величина		Единица		Связь с основными единицами СИ
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	
Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 м²·кг·с⁻²
Мощность излучения (поток излучения)	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 м²·кг·с⁻³
Интенсивность излучения (плотность потока излучения)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²	1 Вт/м² = 1 кг·с⁻³
Поток частиц	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с⁻¹	
Плотность потока частиц	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени-метр в минус второй степени	с⁻¹·м⁻²	